舰空导弹杀伤概率随机化检验方法

吴福强，席如冰

（中国人民解放军92941部队93分队，辽宁 葫芦岛 125001）

摘要：目的 充分有效利用生产方风险，在既定的生产方风险和有限的试验样本条件下，合理分配舰空导弹杀伤概率假设检验中的双方风险。**方法** 通过似然函数推导检验问题的最优势检验，设计一种随机化检验方法，在检验完成后且必要时进行一次Bernoulli试验，以确定是否接受原假设。**结果** 计算结果显示，相对经典假设检验方法，随机化检验方法可以保证实际生产方风险不超过既定的生产方风险上限，同时可使军方风险更小。**结论** 该方法能够合理利用生产方风险，在不增加试验样本的条件下，降低军方风险，具有很好的工程实践意义。

关键词：舰空导弹；杀伤概率；二项分布；随机化检验；最优势检验

DOI：10.7643/ issn.1672-9242.2018.01.003

中图分类号：TJ761.1 **文献标识码：**A

文章编号：1672-9242(2018)01-0012-03

Stochastic Test Method of Ship-to-Air Missile Kill Probability

WU Fu-qiang, *XI Ru-bing*

(Troop 92941 Unit 93, PLA, Huludao 12500l, China)

ABSTRACT: Objective To take full advantages of the producer's risks and allocate risks of both the producer and the customer in ship-to-air missile kill probability hypothesis testing reasonably based on established risk and test sample size. **Methods** The most powerful test which was named as stochastic test was induced by likelihood function. A Bernoulli test was taken through when necessary after the completion of the test to determine whether to accept the null hypothesis or not. **Results** Compared with the classical hypothesis testing method, stochastic test method can ensure that the actual producer's risk does not exceed established producer's risk limit, while reducing risks of the customer. **Conclusion** This method can make good use of risks of the producer and reduce risks of the customer without increasing test samples. It has very good engineering practice significances.

KEY WORDS: ship–to-air missile; kill probability; binomial distribution; stochastic test; most powerful test

导弹的单发杀伤概率是舰空导弹武器系统重要的能力指标之一，其水平高低直接影响武器系统的作战效能。在舰空导弹武器系统性能鉴定试验中，经常需要对杀伤概率进行假设检验，通常可以将检验描述为如下的假设检验问题[1]：

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p = \lambda p_0 = p_1, \lambda < 1 \end{cases} \tag{1}$$

式中：H_0 和 H_1 分别是原假设和目标假设；p_0 和 p_1 分别是杀伤概率的目标值和最低可接受值。

设 $X = (X_1, \cdots, X_n)$ 是来自 Bernoulli 分布族 $\{B(1, p) : 0 < p < 1\}$ 的样本。在工程应用中，一般用充分统计量 $c(X) = X_1 + \cdots + X_n$ 的一次观察值是否落入拒绝域来确定是否拒绝原假设。当样本容量较少时，生产方风险或军方风险信息往往不能得到充分考虑。

文中采用随机化检验方法，通过似然函数推导检

收稿日期：2017-11-21；**修订日期：**2017-11-25

作者简介：吴福强（1986—），男，辽宁阜新人，硕士，主要研究方向为战术导弹武器系统试验总体。

验问题的最优势检验，在检验完成后且必要时进行一次 Bernoulli 试验，以确定是否接受原假设。在较少的试验样本条件下，能够充分有效利用生产方风险信息，是更为科学合理的试验评估方法。

1　问题背景

对于概率 p 的假设检验问题（1），记 $\frac{1-p_1}{1-p_0}=d$ 为检出比，则似然比为：

$$\delta=\frac{f\left(x/p_1\right)}{f\left(x/p_0\right)}=\frac{p_1^s\left(1-p_1\right)^{n-s}}{p_0^s\left(1-p_0\right)^{n-s}}=\lambda^s d^{n-s} \tag{2}$$

获得试验样本 X 后，用充分统计量 c 进行假设检验，得到如下的判别条件：若 $c<\frac{n\ln d}{\ln d-\ln\lambda}=m$，拒绝 H_0；若 $c\geq m$，接收 H_0。其中，n 为试验次数，c 为试验成功数。

H_0 和 H_1 是两个互相竞择的统计假设，称 H_0 为原假设，H_1 为备择假设。假设检验所冒风险即为犯"弃真"和"采伪"两类错误的概率。在工程实践中，这两个概率分别对应生产方风险和军方风险。

犯"弃真"错误的概率，即生产方风险为：

$$\alpha_1=P\left\{H_0\text{为真的情况下，拒绝}H_0\right\}=$$
$$P\left\{H_0\text{为真的情况下，子样}(x_1,\cdots,x_n)\text{落在拒绝域}D\text{内}\right\}=$$
$$P\{(x_1,\cdots,x_n)\in D\mid H_0\}$$

犯"采伪"错误的概率，即军方风险为：

$$\beta_1=P\left\{H_1\text{为真的情况下，接收}H_0\right\}=$$
$$P\{(x_1,\cdots,x_n)\notin D\mid H_1\}$$

对于二项分布参数的假设检验，风险计算公式为：

$$\alpha_1=\sum_{i=0}^{c-1}C_n^i p_0^i(1-p_0)^{n-i} \tag{3}$$

$$\beta_1=\sum_{i=c}^{n}C_n^i p_1^i(1-p_1)^{n-i} \tag{4}$$

由于二项分布的试验成功数是一个整数，通常无法得到一个 c 的值，使得生产方风险恰好等于可容忍的最大值。对于一个给定的检验水平 α，通常一个具有较小 $\alpha_1(\alpha_1<\alpha)$的检验所对应的 β_1 较大，也就是不能够充分利用生产方风险的容忍上限的检验通常会给军方带来较大风险。经典方法中，为了在有限样本条件下完成检验，不超过生产方风险的容许上限，所得的军方风险就会明显偏大，实际上也就无法充分运用给定的检验水平。为了解决这个问题，提出如下的随机化检验方法。

2　随机化检验方法

对假设检验问题（1），构造似然比统计量：

$$\lambda(x)=\frac{\prod_{i=1}^{n}p(x_i;p_1)}{\prod_{i=1}^{n}p(x_i;p_0)}=\frac{p_1^{n\bar{x}}(1-p_1)^{n-n\bar{x}}}{p_0^{n\bar{x}}(1-p_0)^{n-n\bar{x}}}$$

容易验证，$\lambda(x)$是关于 $n\bar{x}$ 的单调减函数，因此该假设检验问题的最优势检验[2]（Most Powerful Test）函数具有如下形式：

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & n\bar{x}<c\\ r, & n\bar{x}=c\\ 0, & n\bar{x}>c\end{cases}$$

当 H_0 成立时，X 服从成功概率为 p_0 的 Bernoulli 分布，则 $n\bar{X}\sim B(n,p_0)$。取检验水平为 $\alpha(0<\alpha<1)$，则 r 和 c 由式（5）、（6）确定：

$$\alpha=E_{p_0}\varphi(X)=\sum_{i=0}^{c-1}C_n^i {p_0}^i(1-p_0)^{n-i}+$$
$$r\cdot C_n^c {p_0}^c(1-p_0)^{n-c} \tag{5}$$

$$r=\frac{\alpha-\sum_{i=0}^{c-1}C_n^i {p_0}^i(1-p_0)^{n-i}}{C_n^c {p_0}^c(1-p_0)^{n-c}},\quad 0<r<1 \tag{6}$$

此时，假设检验的三个判别条件为：若样本观察值满足条件 $n\bar{x}<c$，则拒绝原假设；若样本观察值满足条件 $n\bar{x}>c$，则接受原假设；若 $n\bar{x}=c$，则先做一个成功概率为 r 的 Bernoulli 试验，如果试验结果为成功，则拒绝原假设，反之则接受原假设。

成功概率为 r 的 Bernoulli 试验可以采用计算机生成（0，1）区间的均匀分布伪随机数来模拟，步骤如下：生成（0，1）区间的均匀分布随机数 l；如果 $l\leq r$，则试验结果为成功，否则试验结果为失败。

按照上述判别条件确定的拒绝域，双方风险分别由式（7）、（8）计算：

$$\alpha_2=\sum_{i=0}^{c-1}C_n^i p_0^i(1-p_0)^{n-i}+r\times C_n^c p_0^c(1-p_0)^{n-c}=\alpha \tag{7}$$

$$\beta_2=\sum_{i=c+1}^{n}C_n^i p_1^i(1-p_1)^{n-i}+(1-r)\times C_n^c p_1^c(1-p_1)^{n-c} \tag{8}$$

由式（7）可知，$\alpha_2=\alpha$，因此上述三个差别条件确定的拒绝域所对应检验方法的为检验问题（1）的最优势检验。通过对比式（3）、（4）和（7）、（8）可以发现，$\alpha_2=\alpha>\alpha$，且 $\beta_2<\beta_1$，式（7）、（8）可以理解为在式（3）、（4）的基础上加上一个修正量 r，将 $n\bar{x}=c$ 时所对应的检验风险分配给生产方和军方，使生产方风险保持在可容忍范围内，同时可降低军方风险。

3　算例

本节用一个仿真算例将随机化检验方法与经典二项分布假设检验方法进行对比。

设 p_0 和 p_1 分别为某型舰空导弹杀伤概率的目标

值和最低可接受值，α_0 为生产方风险上限，n 为试验样本量，c 为成功数，α_1 和 β_1 分别为经典方法中的生产方和军方风险，α_2 和 β_2 为随机化检验方法中的生产方和军方风险。

首先，分别在子样数为 18，p_0=0.8，p_1=0.6 和 p_0=0.75，p_1=0.55 条件下，用经典假设检验方法计算得到生产方风险 α_1 和军方风险 β_1，用随机化检验方法计算得到生产方风险 α_2 和军方风险 β_2。其次，在子样数为 15，p_0=0.75，p_1=0.55 条件下，用两种方法分别计算双方风险。仿真试验结果对比见表 1。

表 1 随机化检验方法与经典假设检验方法所得双方风险对比

p_0	p_1	α_0	n	c	r	α_1	β_1	α_2	β_2
0.8	0.6	0.17	18	13	0.2460	0.1329	0.2088	0.1700	0.1806
0.75	0.55	0.17	18	12	0.2160	0.1390	0.2258	0.1700	0.2003
0.75	0.55	0.17	15	10	0.1310	0.1484	0.2608	0.1700	0.2424

计算结果显示，与经典假设检验方法相比，随机化检验方法得到的军方风险值更小，这说明在同等试验条件下该方法能够充分利用生产方风险，降低军方风险。

4 结语

文中提出的随机化检验方法充分利用了生产方风险信息，很好地解决了小样本试验条件下的舰空导弹杀伤概率假设检验问题。该方法还可以运用于武器装备试验鉴定其他指标的检验工作当中，在不增加实际试验样本的条件下，能够降低军方风险，使检验的风险分配更加合理，具有很好的工程实践意义。

参考文献：

[1] 曲宝忠, 孙晓峰. 海军战术导弹试验与鉴定[M]. 北京: 国防工业出版社, 2006: 64-67.

[2] 茆诗松, 王静龙, 濮晓龙. 高等数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 174-179.