加速寿命试验三参数威布尔分布的极小变异–极大似然估计

马小兵，刘宇杰，王晗
（北京航空航天大学 可靠性与系统工程学院，北京 100191）

摘要：目的 在加速试验中，对寿命服从三参数威布尔分布的产品进行可靠性评估与寿命预测，解决形状参数小于 1 时传统方法难以计算的问题。**方法** 利用三参数威布尔分布与指数分布之间的转换关系，以变异系数误差最小为优化目标，在确定最优位置参数估计值的基础上，应用拟极大似然方法估计分布模型中的其余参数，建立极小变异–极大似然估计（MV-MLE）。根据加速寿命试验中失效机理不变的原则，在失效机理等同条件下，将该方法推广至多应力水平下的可靠寿命评估。**结果** 在单一应力与多应力水平下，通过仿真模拟验证了所提方法的有效性。与传统方法相比，在小样本条件下，所提方法可提高形状参数（机理等同性参数）估计精度 40%以上。**结论** 所提方法对于三参数威布尔分布的参数估计和寿命评估具有较高精度，能够有效克服传统方法的不足，在加速寿命试验评估中具有良好的应用效果。

关键词：三参数威布尔分布；变异系数；加速寿命试验；机理等同性；可靠性评估；寿命预测
中图分类号：TB114 **文献标识码：**A **文章编号：**1672-9242(2023)05-0012-07
DOI：10.7643/ issn.1672-9242.2023.05.003

Minimum Variation-Maximum Likelihood Estimation of Three-parameter Weibull Distribution under Accelerated Life Test

MA Xiao-bing, LIU Yu-jie, WANG Han
(School of Reliability and Systems Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

ABSTRACT: The work aims to estimate the reliability and predict the lifetime of the products subject to three-parameter Weibull distribution under accelerated life test, so as to solve the problem that the traditional methods are difficult to complete the calculation when the shape parameter is less than 1. Through the conversion relationship between three-parameter Weibull distribution and exponential distribution, the best estimated value of the location parameter was determined with the error of coefficient of variation as the optimization objective. Then, the analogue maximum likelihood method was used to estimate the remaining parameters of the Weibull distribution, based on which the minimum variation-maximum likelihood estimation

收稿日期：2023–04–13；**修订日期：**2023–05–04
Received: 2023-04-13; **Revised:** 2023-05-04
基金项目：国家自然科学基金（72201019，52075020）；可靠性与环境工程技术重点实验室项目（6142004210105）；国防技术基础项目（JSZL2018601B004）
Fund: The National Natural Science Foundation of China (72201019, 52075020); Reliability and Environmental Engineering Science & Technology Laboratory (6142004210105); Basic Technical Research Project of China (JSZL2018601B004).
作者简介：马小兵（1978—），男，博士。
Biography: MA Xiao-bing (1978-), Male, Doctor.
引文格式：马小兵，刘宇杰，王晗. 加速寿命试验三参数威布尔分布的极小变异-极大似然估计[J]. 装备环境工程, 2023, 20(5): 012-018.
MA Xiao-bing, LIU Yu-jie, WANG Han. Minimum Variation-Maximum Likelihood Estimation of Three-parameter Weibull Distribution under Accelerated Life Test[J]. Equipment Environmental Engineering, 2023, 20(5): 012-018.

(MV-MLE) was constructed. According to the principle of constant failure mechanism in accelerated life test, the proposed method was extended to evaluate the reliable lifetime of products under multiple stress levels while ensuring the failure mechanism equivalence. The effectiveness of the proposed method was verified by simulations under both single stress level and multiple stress levels. Compared with traditional methods, the proposed method improved the estimation accuracy of shape parameter (i.e. mechanism equivalence parameter) by more than 40% with small samples. The proposed method performs high accuracy for parameter estimation and lifetime prediction of three-parameter Weibull distribution, which overcomes the defects of traditional methods, and has good application effects in the evaluation of accelerated life test.

KEY WORDS: three-parameter Weibull distribution; coefficient of variation; accelerated life test; mechanism equivalence; reliability evaluation; lifetime prediction

由最弱链理论得出的两参数威布尔分布目前已成为描述产品失效规律较为常用的模型之一，在电子器件、机械部件等的可靠性评估中应用广泛[1-5]。三参数威布尔分布通过引入位置参数，使该模型在应用时能够更充分地刻画产品的失效机理。针对两参数威布尔分布的统计推断目前已经有较为成熟的方法体系，常见的参数估计方法包括极大似然估计、最小二乘估计、矩估计、广义极大似然估计[6]、广义最小二乘估计[7]等。三参数威布尔分布的非线性形式更加复杂，导致极大似然方法在某些情况下无法进行数值计算。针对该可靠性工程难题，诸多专家学者开展了大量的理论与工程研究[8-11]。

郑荣跃等[12]将灰色系统中一阶线性微分方程模型的建模方法用于三参数威布尔分布的参数估计，在小样本情况下具有良好的精度。赵冰锋等[13]提出了一种改进的相关系数优化法，在确保参数估计精度的基础上，简化了计算过程。魏艳华等[14]利用混合 Gibbs 算法给出了三参数威布尔分布的贝叶斯估计，并提供了参数的可信区间。杨小玉等[15]则在最小二乘法的基础上提出了一种迭代估计的方法，据此得到的参数估计结果具有较好的收敛性。上述方法虽然为三参数威布尔分布的参数估计提供了新的思路，但是仍存在一定的局限性。灰色模型法在威布尔分布的形状参数小于 1 时难以保证估计的准确性；贝叶斯方法则在先验分布的选取上具有较大的不确定性；相关系数优化法等迭代求解的方法，其参数估计结果则主要依赖于样本的经验分布函数，在样本量不足时会产生较大误差。随着科技水平的进步，产品呈现出高可靠、长寿命的特点[16-18]。对于此类产品的设计研制，加速寿命试验（ALT）能显著缩短产品失效时间，提高寿命和可靠性验证与评估的效率[19-23]。上述方法难以直接应用在加速试验数据的评估中，因此，亟待建立一种适用于加速寿命试验的三参数威布尔分布的参数估计方法。

本文针对三参数威布尔分布，为解决现行方法在参数估计时的不足，提出了一种极小变异–极大似然估计（Minimum Variation-Maximum Likelihood Estimation，MV-MLE）方法，应用于解决外场数据和 ALT 的数据评估。通过仿真模拟与实际案例验证了所提方法的有效性。该方法在小样本情形也具有较高的精度，提高了产品寿命评估的准确性。

1　三参数威布尔分布

假设产品的寿命 T 服从三参数威布尔分布，则其概率密度函数为：

$$f(t)=\frac{m}{\eta}\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m-1}\exp\left[-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{m}\right],m,\eta,\gamma>0,t\geqslant\gamma \tag{1}$$

式中：m 为形状参数；η 为尺度参数；γ 为位置参数。

根据收集得到了样本量为 n 的产品失效寿命数据，记其顺序统计量为：

$$t_{(1)},t_{(2)},\cdots,t_{(n)} \tag{2}$$

式中：$t_{(1)}\leqslant t_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant t_{(n)}$。

基于极大似然估计，可得对数似然函数为：

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\ln f\left[t_{(i)}\right] \tag{3}$$

将对数似然函数对各个参数求偏导，可得：

$$\frac{\partial\ln L}{\partial m}=\frac{n}{m}-n\ln\eta+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(t_{(i)}-\gamma\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{(i)}-\gamma}{\eta}\right)^{m}\ln\frac{t_{(i)}-\gamma}{\eta} \tag{4}$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\eta}=-\frac{nm}{\eta}+\frac{m}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{(i)}-\gamma}{\eta}\right)^{m} \tag{5}$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\gamma}=(1-m)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_{(i)}-\gamma}+\frac{m}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{(i)}-\gamma}{\eta}\right)^{m-1} \tag{6}$$

为得到各个参数的估计值，需要令式（4）、（5）、（6）同时等于 0，联立方程进行求解。一方面，该方程组的解不存在显式表达式，需要进行复杂的数值运算；另一方面，当形状参数 $m\leqslant1$ 时，式（6）恒大于 0，也就是说，似然函数的值会随着位置参数 γ 的增加而增加。因此，得到 γ 的估计值为 $\hat{\gamma}=t_{(1)}$。在 $m<1$ 的情况下，若取 $t_{(1)}$作为位置参数 γ 的估计值，

会使得似然函数趋于无穷大，进而导致威布尔分布中的其他参数无法通过似然方程求出。为克服极大似然估计的上述不足，本文提出了三参数威布尔分布的极小变异–极大似然估计方法，具有较高的可行性。

2 单应力水平下的极小变异–极大似然估计

在单一应力水平下，若位置参数 γ 已知，令 $X=T-\gamma$，则可知 X 服从两参数威布尔分布，且其形状参数为 m，尺度参数为 η。根据式（4）与式（5），可得两参数威布尔分布的似然方程：

$$\frac{\partial \ln L}{\partial m}=\frac{n}{m}-n\ln\eta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_{(i)}-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_{(i)}}{\eta}\right)^{m}\ln\frac{x_{(i)}}{\eta}=0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \eta}=-\frac{nm}{\eta}+\frac{m}{\eta}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_{(i)}}{\eta}\right)^{m}=0 \tag{8}$$

由式（8）可得，$\eta^{m}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{(i)}^{m}$，代入式（7）可得：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{(i)}^{m}\ln x_{(i)}}{\sum_{i=1}^{n}x_{(i)}^{m}}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_{(i)}-\frac{1}{m}=0 \tag{9}$$

因此，单应力水平下形状参数 m 的估计值可通过求解式（9）得到。在此基础上，令 $Y=X^{m}$，则可知 Y 服从均值为 η^{m} 的指数分布，且其变异系数为 1。记 Y 的均值、方差与变异系数的估计值分别为 μ_Y、σ_Y^2 与 C_Y，即：

$$\mu_Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i \tag{10}$$

$$\sigma_Y^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\mu_Y\right)^2 \tag{11}$$

$$C_Y=\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \tag{12}$$

当位置参数 γ 估计越准确时，C_Y 与 1 之间的差距应越小。根据上述原理，三参数威布尔分布的极小变异–极大似然估计方法为：

$$\begin{aligned}&\min\quad G(m,\gamma)=\left|C_Y-1\right|\\&\text{s.t.}\quad\begin{cases}C(m,\gamma)=0\\ \gamma\leqslant t_{(1)}\\ m,\gamma>0\end{cases}\end{aligned} \tag{13}$$

式中：$C(m,\gamma)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{(i)}^{m}\ln x_{(i)}}{\sum_{i=1}^{n}x_{(i)}^{m}}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_{(i)}-\frac{1}{m}$。

根据式（13）得到形状参数与位置参数的估计值 $\hat{m}$、$\hat{\gamma}$ 后，尺度参数的估计值为：

$$\hat{\eta}=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_{(i)}-\hat{\gamma}\right)^{\hat{m}}\right]^{1/\hat{m}} \tag{14}$$

给定可靠度 R，则产品在单应力水平下的可靠寿命的估计值为：

$$\hat{t}_R=\hat{\gamma}+\hat{\eta}\left(-\ln R\right)^{1/\hat{m}} \tag{15}$$

本文所提的极小变异–极大似然估计方法，无需计算复杂的超越方程组。此外，利用威布尔分布与指数分布之间的转化关系，以变异系数的误差最小化为准则，确定了最优的位置参数估计值，避免了传统极大似然估计方法中似然方程组可能无法求解的情况。

3 多应力水平下的极小变异–极大似然估计

假设恒定应力加速寿命试验共有 k 组应力水平，即 $s_1<s_2<\cdots<s_k$，记第 i 组应力水平下观测得到的失效寿命数据的顺序统计量为：

$$t_{i(1)}\leqslant t_{i(2)}\leqslant\cdots\leqslant t_{i,(n_i)},i=1,2,\cdots,k \tag{16}$$

式中：n_i 为第 i 组应力水平下的失效样本数。

在利用多应力水平的加速失效数据对产品进行寿命评估之前，首先介绍加速试验中的失效机理等同性分析原理，这是确保加速试验有效性的必要前提。

3.1 ALT 失效机理等同性分析原理

对 ALT 的失效机理等同性分析主要是在加速试验基本假定的基础上进行的，该基本假定也被称为 Pieruschka 基本假定[24]，其具体的内容表述如下。

在 k 组加速应力水平下，当失效机理保持一致时，各应力水平下产品的寿命分布函数可记为：

$$F_i\left(t\right)=F\left(t;\Theta_i\right) \tag{17}$$

式中：Θ_i 为第 i 组应力水平下寿命分布模型的参数，$i=1,2,\cdots,k$，即不同的应力水平不改变产品的寿命分布族，而只改变分布模型中的参数。

进一步地，根据该假定衍生出了加速因子不变原则[25-26]。在加速寿命试验中，假设产品在应力水平 s_i 和应力水平 s_j 下的寿命分布函数分别为 $F_i\left(t_i\right)$ 和 $F_j\left(t_j\right)$，$1\leqslant i$，$j\leqslant k$。当 $F_i\left(t_i\right)=F_j\left(t_j\right)$ 时，时间比值为：

$$K_{ij}=t_j/t_i \tag{18}$$

K_{ij} 称为应力水平 s_i 相对于应力水平 s_j 的加速因子。

当失效机理保持等同时，K_{ij} 的值与产品的可靠度或工作时间无关，其仅由应力水平的值决定，故称之为加速因子不变原则。根据此原则，对任意的产品

失效时间 t_i，式（19）应恒成立，即：

$$F_i\left(t_i\right)=F_j\left(K_{ij}t_i\right) \tag{19}$$

对于三参数威布尔分布，基于式（19），可以得到：

$$1-\exp\left[-\left(\frac{t_i-\gamma_i}{\eta_i}\right)^{m_i}\right]=1-\exp\left[-\left(\frac{K_{ij}t_i-\gamma_j}{\eta_j}\right)^{m_j}\right] \tag{20}$$

式中：m_i、η_i、γ_i 分别为应力水平 s_i 下的威布尔分布的形状参数、尺度参数与位置参数；m_j、η_j、γ_j 分别为应力水平 s_j 下的威布尔分布的形状参数、尺度参数与位置参数。

根据累积分布函数的单调性，可得：

$$\left(\frac{t_i-\gamma_i}{\eta_i}\right)^{m_i}=\left(\frac{K_{ij}t_i-\gamma_j}{\eta_j}\right)^{m_j} \tag{21}$$

化简整理后有：

$$K_{ij}=\frac{\left(t_i-\gamma_i\right)^{m_i/m_j}\eta_j+\gamma_j\eta_i^{m_i/m_j}}{t_i\eta_i^{m_i/m_j}}=\frac{t_i^{m_i/m_j-1}\eta_j}{\eta_i^{m_i/m_j}}+\cdots \tag{22}$$

因为 K_{ij} 的值仅与应力水平有关，而与产品的失效时间无关，所以有：

$$m_i/m_j-1=0 \tag{23}$$

进一步地，可以得到：

$$K_{ij}=\frac{\left(t_i-\gamma_i\right)\eta_j+\gamma_j\eta_i}{t_i\eta_i}=\frac{\eta_j}{\eta_i}+\frac{\gamma_j\eta_i-\gamma_i\eta_j}{\eta_i}\cdot\frac{1}{t_i} \tag{24}$$

因此有：

$$\gamma_j\eta_i-\gamma_i\eta_j=0 \tag{25}$$

综合上述结果，可得三参数威布尔分布在 ALT 中的失效机理等同性条件为：

$$m_i=m_j,\gamma_i/\eta_i=\gamma_j/\eta_j,K_{ij}=\eta_j/\eta_i \tag{26}$$

即当产品的失效机理在各个加速应力水平下保持等同时，三参数威布尔分布中的形状参数（称为机理等同性参数）应相等。此外，位置参数与尺度参数的比值也应相等，且加速因子等于不同应力水平下尺度参数（或位置参数）的比值。

3.2　参数估计与寿命评估方法

根据三参数威布尔分布在多应力水平下的失效机理等同性条件，记 $\zeta=\gamma_i/\eta_i,i=1,2,\cdots,k$，则在第 i 组应力水平下，位置参数与产品失效寿命均值的比值为：

$$p=\frac{\gamma_i}{\mu_i}=\frac{\gamma_i}{\gamma_i+\eta_i\Gamma\left(1+1/m\right)}=\frac{1}{1+\Gamma\left(1+1/m\right)/\zeta},i=1,2,\cdots,k \tag{27}$$

若取 $\hat{\mu}_i=\sum_{j=1}^{n_i}t_{i(j)}/n_i$ 作为均值的估计值，则位置参数的估计值可表示为：

$$\hat{\gamma}_i=p\hat{\mu}_i \tag{28}$$

令 $x_{i(j)}=t_{i(j)}-\hat{\gamma}_i,i=1,2,\cdots,k,j=1,2,\cdots,n_i$，可得对数似然函数为：

$$\ln L=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln\left\{\frac{m}{\eta_i}\left(\frac{x_{i(j)}}{\eta_i}\right)^{m-1}\exp\left[-\left(\frac{x_{i(j)}}{\eta_i}\right)^{m}\right]\right\} \tag{29}$$

将式（29）分别对参数 m 和 $\eta_i,i=1,2,\cdots,k$ 求偏导，可得似然方程组：

$$\frac{\partial\ln L}{\partial m}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{n_i}{m}-n_i\ln\eta_i+\sum_{j=1}^{n_i}\ln x_{i(j)}-\frac{\sum_{j=1}^{n_i}x_{i(j)}^m\ln x_{i(j)}}{\eta_i^m}+\frac{\ln\eta_i\sum_{j=1}^{n_i}x_{i(j)}^m}{\eta_i^m}\right)=0 \tag{30}$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\eta_i}=-\frac{mn_i}{\eta_i}+\frac{m}{\eta_i}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{x_{i(j)}}{\eta_i}\right)^m=0,i=1,2,\cdots,k \tag{31}$$

由式（31）可得，$\eta_i^m=\sum_{j=1}^{n_i}x_{i(j)}^m\Big/n_i,i=1,2,\cdots,k$，将其代入式（30），可以得到：

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i}{m}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln x_{i(j)}-\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i\sum_{j=1}^{n_i}x_{i(j)}^m\ln x_{i(j)}}{\sum_{j=1}^{n_i}x_{i(j)}^m}=0 \tag{32}$$

多应力水平情况下形状参数 m 的估计值可以通过求解式（32）得到。

记 $\upsilon_i=\frac{\sum_{j=1}^{n_i}x_{i(j)}^m}{n_i},\varphi_i^2=\frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(x_{i(j)}^m-\upsilon_i\right)^2}{n_i-1},c_i=\frac{\varphi_i}{\upsilon_i},i=1,2,\cdots,k$，根据威布尔分布与指数分布之间的转化关系，当参数 m 和 ζ 估计越准确时，c_i 应越接近 1。因此，多应力水平情况下的极小变异–极大似然估计方法为：

$$\begin{aligned}&\min\quad G_{\mathrm{A}}\left(m,\zeta\right)=\sum_{i=1}^{k}\left|c_i-1\right|\\&\text{s.t.}\quad\begin{cases}C\left(m,\zeta\right)=0\\\hat{\gamma}_i\le t_{i(1)},i=1,2,\cdots,k\\m,\zeta>0\end{cases}\end{aligned} \tag{33}$$

式中：$C\left(m,\zeta\right)=\sum_{i=1}^{k}n_i\Big/m+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\ln x_{i(j)}-\sum_{i=1}^{k}\left[n_i\sum_{j=1}^{n_i}x_{i(j)}^m\ln x_{i(j)}\Big/\sum_{j=1}^{n_i}x_{i(j)}^m\right]$。

根据式（33）得到形状参数的估计值 $\hat{m}$ 以及 $\hat{\zeta}$ 后，各个应力水平下尺度参数的估计值为：

$$\hat{\eta}_i=\left[\sum_{j=1}^{n_i}\left(t_{i(j)}-\hat{\gamma}_i\right)^{\hat{m}}\Big/n_i\right]^{1/\hat{m}},i=1,2,\cdots,k \tag{34}$$

若选择逆幂律模型作为加速模型，则有：

$$\ln\hat{\eta}_i = a + b\ln s_i, b<0, i=1,2,\cdots,k \tag{35}$$

式中：a、b 为加速模型中的待估参数。

根据式（35），尺度参数的对数 $\ln\eta$ 与应力水平的对数 $\ln s$ 之间呈线性关系，因此可建立 $\ln\eta$ 与 $\ln s$ 的线性回归模型，通过最小二乘法估计加速模型中的参数 a 与 b。

给定常规应力水平 s_0 与规定的可靠度 R，则产品在常规应力下的可靠寿命的估计值为：

$$\hat{t}_{R,0} = \hat{\eta}_0\left[\hat{\zeta} + (-\ln R)^{1/\hat{m}}\right] \tag{36}$$

式中：$\hat{\eta}_0 = \exp\left(\hat{a} + \hat{b}\ln s_0\right)$。

4 仿真模拟

4.1 单应力水平下的仿真模拟

当形状参数 $m<1$ 时，无法直接应用极大似然方法估计三参数威布尔分布中的参数。为了验证所提方法的合理性和有效性，在此提出一种以均值误差最小为优化目标的对照方法用于仿真结果的对比分析，其原理为：

$$\begin{aligned} &\min \quad G'(m,\gamma,\eta) = \left|\mu - \hat{\mu}\right| \\ &\text{s.t.} \quad \begin{cases} C(m,\gamma) = 0 \\ C'(m,\gamma,\eta) = 0 \\ m,\eta>0, t_{(1)} \ge \gamma > 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{37}$$

式中：$\mu = \gamma + \eta\Gamma(1+1/m)$；$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} t_{(i)} \Big/ n$；

$$C(m,\gamma) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}^{m}\ln x_{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}^{m}} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_{(i)} - \frac{1}{m};$$

$$C'(m,\gamma,\eta) = \eta - \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(t_{(i)} - \gamma\right)^{m}\right]^{1/m}。$$

根据式（37）得到各参数的估计值 m'、γ'、η' 后，给定可靠度 R，则产品在单应力水平下的可靠寿命的估计值为：

$$t'_R = \gamma' + \eta'(-\ln R)^{1/m'} \tag{38}$$

建立如下仿真模型：

$$t_i \sim \gamma + Wbl(m,\eta), i=1,2,\cdots,n \tag{39}$$

式中：$\gamma=10$；$m=0.5$；$\eta=20$；$n=(5,15,30)$，即设置 3 组不同样本量的仿真模型。

在不同的样本量下各进行 1 000 次仿真，取平均值作为参数估计的结果，具体见表 1。

由仿真结果可以看出，本文所提出的 MV-MLE 方法更加准确。原因是，相比于威布尔分布的均值，指数分布的变异系数是不随模型参数改变而变化的恒定值，能够有效降低参数估计的波动性对优化过程的影响。针对形状参数（机理等同性参数）m，在小样本的情形下（$n=5$），MV-MLE 方法的估计结果与真值的绝对误差为 0.363 5，而对照方法所得结果与真值的绝对误差为 0.702 3，评估精度提升了 48.24%。

表 1 单一应力水平下的仿真结果

Tab.1 Simulation results under single stress level

方法	样本量 n	m	γ	η
MV-MLE	5	0.863 5	17.829 3	26.979 5
对照方法		1.202 3	17.154 9	29.057 6
MV-MLE	15	0.708 4	10.613 3	25.736 0
对照方法		0.775 5	12.479 8	28.143 5
MV-MLE	30	0.614 8	9.813 2	24.194 7
对照方法		0.713 1	8.060 4	26.467 5

4.2 多应力水平下的仿真模拟

以式（35）所示的逆幂律加速模型为例，建立如式（40）所示的仿真模型：

$$t_{ij} \sim \zeta\eta_i + Wbl(m,\eta_i), i=1,2,3,4, j=1,2,\cdots,n \tag{40}$$

式中：$\zeta=2$；$m=2.5$；$\ln\eta_i = a - b\ln s_i, i=1,2,3,4$；$a=15, b=2$。

选择温度应力作为加速应力，各个应力水平的设置为：

$$(s_1,s_2,s_3,s_4) = (293.15,333.15,383.15,433.15) \tag{41}$$

假设各加速应力水平下的样本量均为 $n=(5,15,30)$，根据上述仿真模型生成加速寿命数据。在不同的样本量下各进行 1 000 次仿真，取平均值作为参数估计的结果，具体见表 2。

表 2 多应力水平下的仿真结果

Tab.2 Simulation results under multiple stress levels

方法	样本量 n	m	ζ	a	b
MV-MLE	5	2.443 5	2.969 3	14.895 9	2.025 4
MLE	5	2.375 2	3.102 8	14.874 8	2.021 4
MV-MLE	15	2.469 3	2.302 0	14.982 3	2.011 2
MLE	15	2.389 8	2.296 3	14.888 3	1.995 1
MV-MLE	30	2.523 5	2.046 7	14.987 6	1.998 7
MLE	30	2.450 1	2.130 5	14.954 3	1.998 6

可以看出，随着样本量的增加，所提方法与传统极大似然估计方法的参数估计结果均越来越接近真值。此外，针对形状参数（机理等同性参数）m，在小样本的情形下（$n=5$），本文所提出的 MV-MLE 方法的估计精度更高，与真值的相对误差为 2.26%，而 MLE 方法所得结果与真值的相对误差为 4.99%，评估的精度提升了 54.71%。

5　实例应用

针对某型陶瓷球轴承开展了加速寿命试验，共有 4 组应力水平，每组应力水平下均有 10 个失效样本，具体的应力水平和失效数据见表 3。

表 3　陶瓷球轴承失效数据

Tab.3 Failure data of ceramic ball bearings

$\times 10^3$

应力水平/MPa	失效数据（转）				
0.87	1 670	2 200	2 510	3 000	3 900
	4 700	7 530	14 700	27 800	37 400
0.99	800	1 000	1 370	2 250	2 950
	3 700	6 070	6 650	7 050	7 370
1.09	12	180	200	240	260
	320	320	420	440	880
1.18	73	98	117	135	175
	262	270	350	386	456

选择式（35）所示的逆幂律模型作为加速模型，应用本文所提出的多应力水平下的 MV-MLE 方法，得到参数估计的结果为：$\hat{m}=0.894\ 2$，$\hat{\zeta}=0.040\ 2$，$\hat{a}=7.471\ 1$，$\hat{b}=13.579\ 7$。

文献[27]中利用贝叶斯方法，采用两参数威布尔分布结合逆幂律模型对该组加速失效数据进行了评估，得到参数的后验均值为：$\tilde{m}=0.744, \tilde{a}=7.482, \tilde{b}=13.317$。

根据式（33），由上述估计结果分别计算多应力水平下变异系数的误差和 $G_A\left(m,\zeta\right)$。对于 MV-MLE 方法，$G_{A,1}\left(\hat{m},\hat{\zeta}\right)=1.269\ 7$；对于文献[27]中的结果，$G_{A,2}\left(\tilde{m},0\right)=1.587\ 0$，$G_{A,1}<G_{A,2}$。由此可见，通过 MV-MLE 方法得到的三参数威布尔分布更加符合威布尔分布与指数分布的转换关系，更有利于提升寿命评估时的准确性。

该陶瓷球轴承的常规工作应力为 s_0=0.75 MPa，给定可靠度 R=0.8，则根据 MV-MLE 方法的参数估计结果，由式（36）可得其可靠寿命为：$\hat{t}_{R,0}=1.98\times10^7$ 转。

6　结论

1）利用威布尔分布与指数分布之间的转换关系，以变异系数的误差最小为优化准则，提出了三参数威布尔分布的极小变异–极大似然估计方法，克服了形状参数小于 1 的情况下传统方法难以计算的困难，适用范围更加广泛。

2）推导了三参数威布尔分布的失效机理等同性条件，在加速寿命试验失效机理等同条件的基础上，将所提方法推广应用到了多应力水平条件下产品的可靠性评估，确保了寿命预测的有效性。

3）通过仿真模拟验证了所提方法的有效性与优越性。与相应的对照方法相比，在小样本情况下，所提方法能够显著降低形状参数（机理等同性参数）的估计误差，提升了产品可靠寿命评估的精度。

参考文献：

[1] 邹争，董从林，袁成清，等. 基于二参数威布尔分布的水润滑橡胶尾轴承可靠性寿命分析[J]. 舰船科学技术，2015, 37(2): 48-52.
ZOU Zheng, DONG Cong-lin, YUAN Cheng-qing, et al. Analysis Reliability Life of Water Lubricated Rubber Stern Tube Bearing Based on Two-Parameter Weibull Distribution[J]. Ship Science and Technology, 2015, 37(2): 48-52.

[2] 徐微，胡伟明，孙鹏. 基于两参数威布尔分布的设备可靠性预测研究[J]. 中国工程机械学报，2013, 11(2): 112-116.
XU Wei, HU Wei-ming, SUN Peng. Equipment Reliability Prediction Based on Dual-Parametric Weibull Distribution[J]. Chinese Journal of Construction Machinery, 2013, 11(2): 112-116.

[3] 伍建军，吴小明，谢周伟，等. 改进威布尔分布的矿冶零部件可靠性寿命预测研究[J]. 机械科学与技术，2017, 36(3): 436-441.
WU Jian-jun, WU Xiao-ming, XIE Zhou-wei, et al. Prediction of Reliability Life of Mining and Metallurgy Parts via an Improved Weibull Distribution[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2017, 36(3): 436-441.

[4] 雷彤. 基于威布尔分布的波音 737NG 飞机 IDG 竞争性故障模型研究[J]. 航空维修与工程, 2018(1): 75-79.
LEI Tong. Reliability Analysis for B737NG IDG with Competing Failure Based on Weibull Distribution[J]. Aviation Maintenance & Engineering, 2018(1): 75-79.

[5] 滕永兴，曹国瑞，杨霖，等. 基于混合威布尔分布的电能表寿命预测研究[J]. 电气传动, 2021, 51(1): 61-66.
TENG Yong-xing, CAO Guo-rui, YANG Lin, et al. Research on Life Prediction of Watt-Hour Meters Based on Mixed Weibull Distribution[J]. Electric Drive, 2021, 51(1): 61-66.

[6] JACQUELIN J. Generalization of the Method of Maximum Likelihood (Insulation Testing)[J]. IEEE Transactions on Electrical Insulation, 1993, 28(1): 65-72.

[7] KANTAR Y. Generalized Least Squares and Weighted Least Squares Estimation Methods for Distributional Parameters[J]. REVSTAT-Statistical Journal, 2015, 13(3): 263-2825.

[8] COHEN C A, WHITTEN B. Modified Maximum Likelihood and Modified Moment Estimators for the Three-Parameter Weibull Distribution[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 1982, 11(23): 2631-2656.

[9] CHENG R C H, AMIN N A K. Estimating Parameters in

Continuous Univariate Distributions with a Shifted Origin[J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), 1983, 45(3): 394-403.

[10] COUSINEAU D. Nearly Unbiased Estimators for the Three-Parameter Weibull Distribution with Greater Efficiency than the Iterative Likelihood Method[J]. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 2009, 62(1): 167-191.

[11] TEIMOURI M, HOSEINI S M, NADARAJAH S. Comparison of Estimation Methods for the Weibull Distribution[J]. Statistics, 2013, 47(1): 93-109.

[12] 郑荣跃, 严剑松. 威布尔分布参数估计新方法研究[J]. 机械强度, 2002, 24(4): 599-601.
ZHENG Rong-yue, YAN Jian-song. New Estimation Method of three-Parameter Weibull Distribution[J]. Journal of Mechanical Strength, 2002, 24(4): 599-601.

[13] 赵冰锋, 吴素君. 三参数威布尔分布参数估计方法[J]. 金属热处理, 2007, 32(S1): 443-446.
ZHAO Bing-feng, WU Su-jun. Parameter Estimation Methods for 3-Parameter Weibull Distribution[J]. Heat Treatment of Metals, 2007, 32(S1): 443-446.

[14] 魏艳华, 王丙参, 孙永辉. 三参数威布尔分布贝叶斯估计的混合 Gibbs 算法[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2015, 52(2): 233-240.
WEI Yan-hua, WANG Bing-can, SUN Yong-hui. Mixed Gibbs Algorithm of Bayesian Estimation for Three-Parameter Weibull Distribution[J]. Journal of Sichuan University (Natural Science Edition), 2015, 52(2): 233-240.

[15] 杨小玉, 宋佳昕, 谢里阳, 等. 基于最小二乘迭代威布尔分布的三参数估计[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2023, 51(2): 20-26.
YANG Xiao-yu, SONG Jia-xin, XIE Li-yang, et al. Three-Parameter Estimation of the Weibull Distribution Based on Least Squares Iteration[J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition), 2023, 51(2): 20-26.

[16] MEEKER W Q, HAMADA M. Statistical Tools for the Rapid Development and Evaluation of High-Reliability Products[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1995, 44(2): 187-198.

[17] 王瑞祥, 许凌天, 陈晓阳, 等. 小样本无失效寿命试验数据的轴承可靠性评估[J]. 航空动力学报，2021, 36(11): 2400-2409.
WANG Rui-xiang, XU Ling-tian, CHEN Xiao-yang, et al. Reliability Evaluation of Bearings Based on Small Samples and Zero-Failure Life Test Data[J]. Journal of Aerospace Power, 2021, 36(11): 2400-2409.

[18] MEEKER W Q, ESCOBA L A. Reliability: The other Dimension of Quality[J]. Quality Technology & Quantitative Management, 2004, 1(1): 1-25.

[19] ELSAYED E A. Overview of Reliability Testing[J]. IEEE Transactions on Reliability, 2012, 61(2): 282-291.

[20] ZHU Xiao-jun, LIU Kai, HE Mu, et al. Reliability Estimation for One-Shot Devices under Cyclic Accelerated Life-Testing[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2021, 212: 107595.

[21] 马小兵, 王亭亭, 赵宇. 融合纤维数据的复合材料筒体结构持久寿命评估方法[J]. 复合材料学报, 2013, 30(4): 219-224.
MA Xiao-bing, WANG Ting-ting, ZHAO Yu. Method on Rupture Life Evaluation for Composite Cylinder Based on Data Fusion of Carbon Fiber[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2013, 30(4): 219-224.

[22] 刘晓娣, 韩建立, 姜普涛. 弹上电子部件加速因子估计方法研究[J]. 装备环境工程, 2022, 19(8): 7-12.
LIU Xiao-di, HAN Jian-li, JIANG Pu-tao. Acceleration Factor Estimation of Missile-Borne Electronic Components[J]. Equipment Environmental Engineering, 2022, 19(8): 7-12.

[23] 郭华, 祝逢春, 豆仁福, 等. 引信步进应力加速寿命试验无失效数据情况贮存寿命评估[J]. 装备环境工程, 2023, 20(2): 26-31.
GUO Hua, ZHU Feng-chun, DOU Ren-fu, et al. Evaluation of Storage Life of Fuze via Step-Stress Accelerated Life Test with Zero-Failure Data[J]. Equipment Environmental Engineering, 2023, 20(2): 26-31.

[24] LMSD 800400, Relation Between Lifetime Distribution and the Stress Level Causing Failure[S].

[25] WANG Han, ZHAO Yu, MA Xiao-bing, et al. Equivalence Analysis of Accelerated Degradation Mechanism Based on Stochastic Degradation Models[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2017, 33(8): 2281-2294.

[26] WANG Han, MA Xiao-bing, BAO Rui, et al. Mechanism Equivalence Analysis for Accelerated Degradation Tests Based on Tweedie Exponential Dispersion Process[J]. Quality Technology & Quantitative Management, 2022, 19(6): 722-748.

[27] UPADHYAY S K, MUKHERJEE B. Bayes Analysis and Comparison of Accelerated Weibull and Accelerated Birnbaum–Saunders Models[J]. Communications in Statistics - Theory and Methods, 2009, 39(2): 195-213.

责任编辑：刘世忠