

面内碰摩作用下带冠叶片组合 共振动力学特性研究

苑高飞¹, 冯志壮¹, 谷晓宁², 邢龙涛¹, 樊枫¹

(1.中国直升机设计研究所 直升机动力学全国重点实验室, 江西 景德镇 333001;

2.大连理工大学 机械工程学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: **目的** 研究面内碰摩作用下带冠叶片组合共振的动力学特性。**方法** 将带冠叶片等效为端部具有集中质量的旋转悬臂梁结构, 随后基于宏观滑移原理建立冠间碰摩载荷的力学模型, 并采用谐波平衡法求解该载荷的等效刚度和等效阻尼, 最后采用多尺度法建立组合共振下柔性带冠叶片的瞬态及稳态振动控制方程。研究叶冠倾角及频率解谐参数对组合共振下叶片瞬态及稳态响应动力学特性的影响。**结果** 特定参数条件下, 柔性带冠叶片将发生组合共振, 忽略叶冠碰摩作用时, 内共振和主共振将不会同时发生。**结论** 组合共振下, 主共振能量通过内共振模态间的耦合作用由主共振模态传递到非主共振模态上, 且内共振模态稳态响应幅值存在 π 的相位差。几何非线性在变主共振解谐参数的稳态振动中起硬弹簧作用, 而其在变内共振解谐参数的响应中起软弹簧作用。增大叶冠法向接触刚度会抑制组合共振下叶片的稳态响应幅值, 并缩窄不稳定域的宽度。

关键词: 带冠叶片; 冠间碰摩; 几何非线性; 组合共振; 多尺度法; 谐波平衡法

中图分类号: TH453 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-9242(2025)01-0069-12

DOI: 10.7643/issn.1672-9242.2025.01.007

Combination Resonance of a Shrouded Blade under In-plane Contact and Friction

YUAN Gaofei¹, FENG Zhizhuang¹, GU Xiaoning², XING Longtao¹, FAN Feng¹

(1. National Key Laboratory of Helicopter Aeromechanics, China Helicopter Research and Development Institute, Jiangxi Jingdezhen 333001, China; 2. School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Liaoning Dalian 116024, China)

ABSTRACT: The work aims to study the dynamic characteristics of the combination resonance in vibration responses of the shrouded blade under in-plane contact and friction. Firstly, the shrouded blade was modeled as a rotating beam with a mass on the blade tip, and the mechanical model of contact and friction forces between adjacent shrouds was established through the macro-slip model. Then, the equivalent stiffness and damping of the mechanical model were solved by the harmonic balance method, and the transient and steady-state equations under the combination resonance were established by the method of multiple scales. The effects of shrouded blade inclination angle and frequency detuning parameters on the dynamic characteristics of transient and steady-state responses under combination resonance were studied. Under the condition of specific parameters, the

收稿日期: 2024-06-16; 修订日期: 2024-09-20

Received: 2024-06-16; Revised: 2024-09-20

基金项目: 直升机旋翼动力学国家级重点实验室基金 (61422202206)

Fund: Fund for State Key Laboratory of Helicopter Rotor Dynamics (61422202206)

引文格式: 苑高飞, 冯志壮, 谷晓宁, 等. 面内碰摩作用下带冠叶片组合共振动力学特性研究[J]. 装备环境工程, 2025, 22(1): 69-80.

YUAN Gaofei, FENG Zhizhuang, GU Xiaoning, et al. Combination Resonance of a Shrouded Blade under In-plane Contact and Friction[J]. Equipment Environmental Engineering, 2025, 22(1): 69-80.

combination resonance occurred in the shrouded blade, and the internal resonance and the primary resonance did not occur at the same time when the rub-impact effect of the shrouded blade was ignored. Under the combination resonance, the primary resonance energy is transferred from the main resonance mode to the non-main resonance mode through the coupling between the internal resonance modes, and the steady-state response amplitude of the internal resonance modes has a π phase difference. Geometric nonlinearity plays a role of hardening spring in the steady-state response of the blade under variable detuning parameters of the primary resonance, whereas, it plays the role of softening spring in the response under variable detuning parameter of the internal resonance. Increasing the normal contact stiffness of the bladed shroud will suppress the steady-state response amplitude of the blade under combination resonance and narrow the width of the unstable domain.

KEY WORDS: shrouded blade; contact and friction between adjacent shrouds; geometric nonlinearity; combination resonance; method of multiple scales; method of harmonic balance

发动机末级叶片展弦比高,具有明显的几何非线性,气动载荷作用下容易发生大变形。另外,叶冠作为干摩擦阻尼结构,使叶片具有很强的接触非线性特征。这种几何、接触非线性的耦合作用将使叶片产生如组合共振等复杂的非线性动力学现象,从而影响叶片振动的稳态响应幅值及不稳定域对应的参数域宽度^[1]。因此,深入研究其动力学特性具有重要的理论和工程价值。

国内外学者对轴流涡轮叶片和相邻叶冠间接触动力学模型的建模已有许多研究成果,研究人员广泛建立单叶片模型用于分析结构的动力学特性^[2-3]。麻岳敏等^[4]考虑弯扭耦合的影响,将旋转叶片等效为旋转悬臂梁。对于带冠叶片的动力学模型,多数学者仅考虑了参考叶片与相邻叶片的相互作用^[5-7],部分学者建立了完整带冠叶片的动力学模型^[8-10]。

对于描述相邻叶冠间接触的力学模型,众多学者采用宏观滑移、微观滑移和 Sgn 模型建立相邻叶冠间的碰摩载荷模型。Yang 等^[11]提出了一种可用于描述相邻叶冠接触面三维摩擦的三维接触模型。谢永慧等^[12]基于谐波平衡法,建立了冠间碰摩载荷的等效刚度和等效阻尼模型。

针对具有几何非线性的高展弦比轴流涡轮叶片的动力学特性,众多学者分别研究了内共振^[13-15]、主共振^[16-17]及超/次谐波共振^[18]下叶片的动力学特性。针对内共振和主共振组成的组合共振, Li 等^[19]研究了控制方程系数对结构组合共振稳态响应幅值及稳定性的影响。Yuan 等^[20]研究了多模态组合共振下,结构参数对叶片瞬态及稳态动力学特性的影响。

叶冠接触的强非线性将导致叶片振动产生稳定性转换、分叉和混沌等非线性动力学现象^[21]。何冰冰^[22]研究了带冠叶片振动过程中的多倍周期、准周期和混沌现象。He 等^[23]分析了非对称碰摩作用下带冠叶片弯扭耦合振动特性。Mashayekhi 等^[24]研究了失谐对带冠叶盘振动局部化的影响。Nan 等^[25]基于谐波平衡法研究研究了结构参数对振动特性的影响。

现有针对发动机叶片动力学特性的研究中,缺少相邻叶冠间碰摩诱发结构组合共振的研究。针对上述

问题的研究有助于研究人员更充分地理解组合共振下带冠叶片的动力学特性,从而提供了一种通过直接改变设计参数对带冠叶片进行减振设计的设计思路。

本研究主要关注叶冠面内碰摩诱发的带冠叶片组合共振的动力学特性。首先,将叶片等效为端部具有集中质量的旋转悬臂梁,并基于谐波平衡原理建立冠间碰摩载荷的等效刚度和阻尼。随后,采用多尺度法推导了组合共振下叶片的瞬态及稳态控制方程。接下来,分析了不同设计参数对原始振动方程稳态响应幅值及频率的影响,发现了响应中的组合共振现象。最后,研究了组合共振下叶片瞬态及稳态响应动力学特性随叶冠倾角及频率解谐参数的变化规律。

1 带冠叶片动力学模型

发动机末级的轴流带冠叶盘是一种循环对称结构,可将完整叶盘视为沿周向分布的若干个完全相同的独立带冠叶片^[22]。叶片示意图见图 1,该叶片被简化为一个端部具有集中质量的旋转的悬臂梁。其中, α 表示叶冠倾角; L 为叶片展向长度; δ_s 表示叶冠法向初始间距; k_s 为叶冠法向接触刚度; N_s 表示作用于叶冠的法向正压力; F_s 为叶冠切向摩擦力; Q 表示叶片所受气动载荷, $Q = Q_0 \sin(l\Omega t)$,其中 Q_0 和 l 分别表示载荷幅值和叶片前障碍物的数目^[16]。

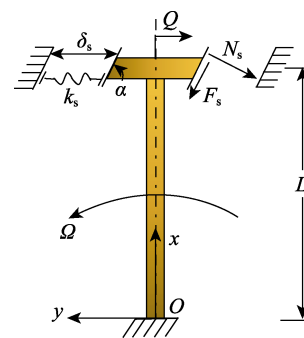


图 1 带冠叶片示意图

Fig.1 Diagram of a shrouded blade

1.1 冠间碰摩载荷模型

准确描述相邻叶冠间的接触和摩擦是建立带冠叶片动力学模型的前提, 本节基于宏观滑移模型和经典库伦摩擦模型, 建立了相邻叶冠间法向正压力和切向摩擦力的力学模型。随后采用谐波平衡法推导了冠间碰摩载荷的等效刚度和等效阻尼。基于文献[16]的研究结果, 带冠叶片的挥舞弯曲位移 v 可展开为如下谐波形式:

$$v = B \cos(l\Omega t - \phi) = B \cos \vartheta \quad (1)$$

式中: B 和 ϕ 分别为叶片挥舞弯曲位移的幅值和相位角。 ϑ 表示相位角, $\vartheta = l\Omega t - \phi$ 。

从而, 叶冠间法向正压力表达式如下:

$$N_s = \begin{cases} -k_s(v - \delta_s) \sin \alpha, & v > \delta_s \\ 0, & -\delta_s \leq v \leq \delta_s \\ -k_s(v + \delta_s) \sin \alpha & v < -\delta_s \end{cases} \quad (2)$$

此时, 一个稳态振动周期内, 切向摩擦力 F_s 关于切向相对位移 ($v_t = (v - \delta_s) \cos \alpha$) 的滞回曲线如图 2 所示。

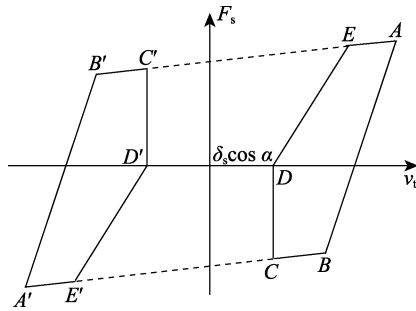


图 2 摩擦力滞回曲线
Fig.2 Hysteretic loop of friction force

$$k_f = \frac{1}{B\pi} \left\{ \begin{aligned} & k_t B \cos \alpha \left[(\vartheta_3 + \vartheta_2 + \vartheta_1 - \pi) - 2 \sin \vartheta_1 + \frac{1}{2} (\sin 2\vartheta_3 + \sin 2\vartheta_2 + \sin 2\vartheta_1) \right] \\ & + 2k_t \delta_s \cos \alpha (\sin \vartheta_3 - \sin \vartheta_2) + \left[\mu k_s B \left(\vartheta_1 + \frac{1}{2} B \sin 2\vartheta_1 \right) - 2\mu k_s \delta_s \sin \vartheta_1 \right] \sin \alpha \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

$$c_f = \frac{1}{-l\Omega B\pi} \left\{ \begin{aligned} & 2k_t B \cos \alpha \left[(\cos \vartheta_1 - 1) + \frac{1}{4} (1 - \cos 2\vartheta_1 + \cos 2\vartheta_2 - \cos 2\vartheta_3) \right] - 2k_t \delta_s \cos \alpha (\cos \vartheta_3 + \cos \vartheta_2) \\ & + 2\mu k_s \delta_s \sin \alpha (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_3 - 1) - \frac{1}{2} \mu k_s B \sin \alpha (\cos 2\vartheta_1 - 1) \end{aligned} \right\}$$

1.2 叶片振动控制方程

假设叶片的扭转刚度较大, 其扭转变形可忽略, 且叶片轴向动态变形主要表现为离心力引起的拉伸变形^[17]。因此, 叶片挥舞弯曲的控制方程为:

$$\begin{aligned} & [m_1 + m_s \delta(x-L)] \ddot{v} + c_v \dot{v} + (E_1 v'')'' - (E_A u' v')' - \\ & \left[\Omega^2 m_1 v + \Omega^2 m_s \delta(x-L) \right] v - \left(E_A \frac{1}{2} v'^3 \right)' = \quad (8) \\ & (-Q + N_s \sin \alpha + F_s \cos \alpha) \delta(x-L) \end{aligned}$$

从而, 建立冠间摩擦力的表达式如下:

$$F_s = \begin{cases} k_t(v_t - B \cos \alpha) + \mu k_s(v - \delta_s) \sin \alpha, & (0 \leq \vartheta < \vartheta_1) \\ -\mu k_s(v - \delta_s) \sin \alpha, & (\vartheta_1 \leq \vartheta < \vartheta_2) \\ 0, & (\vartheta_2 \leq \vartheta < \pi - \vartheta_2) \\ k_t(v_t + \delta_s \cos \alpha), & (\pi - \vartheta_2 \leq \vartheta < \vartheta_3) \\ -\mu k_s(v + \delta_s) \sin \alpha, & (\vartheta_3 \leq \vartheta < \pi) \\ k_t(v_t + B \cos \alpha) + \mu k_s(v + \delta_s) \sin \alpha, & (\pi \leq \vartheta < \pi + \vartheta_1) \\ \mu k_s(v + \delta_s) \sin \alpha, & (\pi + \vartheta_1 \leq \vartheta < \pi + \vartheta_2) \\ 0, & (\pi + \vartheta_2 \leq \vartheta < 2\pi - \vartheta_2) \\ k_t(v_t - \delta_s \cos \alpha), & (2\pi - \vartheta_2 \leq \vartheta < \pi + \vartheta_3) \\ \mu k_s(v - \delta_s) \sin \alpha, & (\pi + \vartheta_3 \leq \vartheta < 2\pi) \end{cases} \quad (3)$$

式中: k_t 为接触面的剪切接触刚度, $k_t = 2[2(1-\nu)/(2-\nu)]k_s$; ν 为材料泊松比, $\nu = 0.3$ 。

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \cos^{-1} \left(\frac{k_t B + 2\mu k_s \delta_s \tan \alpha}{k_t B + 2\mu k_s B \tan \alpha} \right), \quad \vartheta_2 = \cos^{-1} \left(\frac{\delta_s}{B} \right), \\ \vartheta_3 &= \cos^{-1} \left(\frac{k_t \delta_s + \mu k_s \delta_s \tan \alpha}{k_t B + \mu k_s B \tan \alpha} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

将法向正压力按照傅里叶级数展开, 得到:

$$N_s = N_{ks} \cos \vartheta + N_{cs} \sin \vartheta = k_n v + c_n \frac{dv}{dt} \quad (5)$$

式中: k_n 和 c_n 分别表示相邻叶冠接触面间法向正压力的等效刚度和等效阻尼。

最后, 将方程 (1) 代入方程 (5), 基于谐波平衡法中相同谐波项系数相等的规则, 得:

$$k_n = -\frac{k_s \sin \alpha}{B\pi} (2B\vartheta_2 + B \sin 2\vartheta_2 - 4\delta_s \sin \vartheta_2), c_n = 0 \quad (6)$$

同理, 得到切向摩擦力的等效刚度 k_f 和等效阻尼 c_f :

式中: E_A 、 E_1 和 m_1 分别表示叶片的弯曲、拉伸刚度和线密度; m_s 为叶冠质量。 $E_A u' = \int_x^L m_1 \Omega^2 (e+y) dy$ 为离心力引起的叶片轴向位移; e 表示圆盘半径。

对方程 (8) 进行伽辽金离散 ($v = \gamma_1^{(v)} q_1 + \gamma_2^{(v)} q_2$) 和无量纲变换 ($\bar{q}_i = q_i / \delta_s, \tau = \Omega t, k = 1, 2$), 并沿叶片展向进行积分。 \ddot{q}_k 、 \dot{q}_k 、 q_k 和 q_k^3 项对应系数分别为方程的质量、阻尼、刚度和非线性项系数。最终, 得

到前两阶挥舞模态的控制方程如下:

$$\ddot{\bar{q}}_k + c_{k,k}\dot{\bar{q}}_k + \omega_{k,k}^2\bar{q}_k + g_{k,1}\bar{q}_1^3 + 3g_{k,2}\bar{q}_1^2\bar{q}_2 + 3\bar{g}_{k,3}\bar{q}_1\bar{q}_2^2 + \bar{g}_{k,4}\bar{q}_2^3 = f_k \sin(l\tau) \quad (9)$$

式中: k 为挥舞弯曲模态阶数; $\gamma_k^{(v)}$ 为悬臂梁第 k 阶弯曲模态的振型函数。其余方程系数通过方程 (10) 直接积分得到。

$$\begin{aligned} m_k &= \int_0^L m_1 \gamma_k^{2(v)} dx + m_s \gamma_k^{2(v)}, \\ c_k &= \frac{1}{\Omega m_k} \left[\int_0^L c_v \gamma_k^{2(v)} dx - (c_n \sin \alpha + c_f \cos \alpha) \gamma_k^{2(v)}(L) \right], \\ \omega_k^2 &= \frac{1}{\Omega^2 m_k} \left[\int_0^L E_1 \gamma_k^{n2(v)} dx - \int_0^L \Omega^2 m_1 \gamma_k^{2(v)} dx + \int_0^L \int_x^L m_1 \Omega^2 (e+y) dy \gamma_k^{2(v)} dx - \left(\Omega^2 m_s + k_n \sin \alpha + k_f \cos \alpha \right) \gamma_k^{2(v)}(L) \right], \\ g_{k,1} &= \frac{\delta_s^2}{\Omega^2 m_k} \int_0^L \frac{1}{2} E_A \gamma_k^{(v)} \gamma_1^{3(v)} dx, \\ g_{k,2} &= \frac{\delta_s^2}{\Omega^2 m_k} \int_0^L \frac{1}{2} E_A \gamma_k^{(v)} \gamma_1^{2(v)} \gamma_2^{(v)} dx, \\ g_{k,3} &= \frac{\delta_s^2}{\Omega^2 m_k} \int_0^L \frac{1}{2} E_A \gamma_k^{(v)} \gamma_1^{(v)} \gamma_2^{2(v)} dx, \\ g_{k,4} &= \frac{\delta_s^2}{\Omega^2 m_k} \int_0^L \frac{1}{2} E_A \gamma_k^{(v)} \gamma_2^{3(v)} dx, \\ f_k &= -\frac{1}{\delta_s \Omega^2 m_k} Q_0 \gamma_k^{(v)}(L) \end{aligned} \quad (10)$$

2 组合共振下多尺度法解析解

假设叶片挥舞弯曲位移是阻尼的同阶小量, 而气动载荷是阻尼的高阶小量^[17], 引入无量纲小参数 ε , 对方程 (9) 进行如下多尺度变换:

$$\bar{q}_k = \varepsilon \tilde{q}_k, c_{k,k} = \varepsilon \tilde{c}_{k,k}, f_k = \varepsilon^3 \tilde{f}_k \quad (11)$$

并对 \tilde{q}_k 进行时间的多尺度变换:

$$\tilde{q}_k = \varepsilon \tilde{q}_{k,1}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 \tilde{q}_{k,2}(T_0, T_1, T_2) \quad (12)$$

随后, 将方程 (11) 和 (12) 代入方程 (9) 中, 基于等式两端 ε 的同阶次项对应系数相等的原则, 得到各尺度下微分方程组。当叶片同时发生一阶挥舞模态的主共振及前两阶挥舞间的 1:3 内共振时, 挥舞模态频率应满足如下关系:

$$l = \omega_1 + \varepsilon \sigma_1, 3\omega_1 = \omega_2 + \varepsilon \sigma_2 \quad (13)$$

设 ε 时间尺度下方程的解为:

$$\tilde{q}_{k,0} = A_k e^{i\omega_k T_0} + c.c. \quad (14)$$

其中, 振幅 A_k 改写为谐波形式:

$$\varepsilon A_k = \frac{1}{2} \alpha_k e^{i\beta_k} \quad (15)$$

从而, A_k 幅频和相频的瞬态振动控制方程为:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= -\frac{c_{1,1}}{2} \alpha_1 - \frac{3g_{1,2}\alpha_1^2\alpha_2}{8\omega_1} \sin \gamma_2 - \frac{f_1}{2\omega_1} \cos \gamma_1 \\ \dot{\alpha}_2 &= -\frac{c_{2,2}}{2} \alpha_2 + \frac{g_{2,1}}{8\omega_2} \alpha_1^3 \sin \gamma_2 \\ \dot{\gamma}_1 &= \varepsilon \sigma_2 + \frac{c_{1,1}^2}{8\omega_1} - \frac{3g_{1,1}\alpha_1^2}{8\omega_1} - \frac{3g_{1,3}\alpha_2^2}{4\omega_1} + \frac{f_1}{2\omega_1\alpha_1} \sin \gamma_1 - \frac{3g_{1,2}\alpha_1\alpha_2}{8\omega_1} \cos \gamma_2 \\ \dot{\gamma}_2 &= \frac{3c_{1,1}^2}{8\omega_1} - \frac{c_{2,2}^2}{8\omega_2} - \varepsilon \sigma_1 - \left(\frac{9g_{1,1}}{8\omega_1} - \frac{3g_{2,2}}{4\omega_2} \right) \alpha_1^2 - \left(\frac{9g_{1,3}}{4\omega_1} - \frac{3g_{2,4}}{8\omega_2} \right) \alpha_2^2 + \frac{3f_1}{2\omega_1\alpha_1} \sin \gamma_1 - \left(\frac{9g_{1,2}\alpha_1\alpha_2}{8\omega_1} - \frac{g_{2,1}\alpha_1^3}{8\omega_1\alpha_2} \right) \cos \gamma_2 \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\gamma_1 = \sigma_1 T_1 - \beta_1, \gamma_2 = \beta_2 - 3\beta_1 - \sigma_2 T_1$ 。

稳态振动下(叶片时域响应中响应幅值不随时间变化), A_k 幅频的控制方程为:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\varepsilon \sigma_1 + 3\varepsilon \sigma_2 + \frac{c_{2,2}^2}{8\omega_2} \right) \frac{6g_{1,2}\alpha_2^2}{\omega_1} - \left(\varepsilon \sigma_1 + \frac{c_{1,1}^2}{8\omega_1} \right) \frac{2g_{2,1}\alpha_1^2}{\omega_2} + \left(\frac{3g_{1,3}g_{2,1}}{2\omega_1\omega_2} - \frac{9g_{1,2}g_{2,2}}{2\omega_1\omega_2} \right) \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \frac{3g_{1,1}g_{2,1}\alpha_1^4}{4\omega_1\omega_2} - \frac{9g_{1,2}g_{2,4}\alpha_2^4}{4\omega_1\omega_2} \right]^2 = \\ & \left(\frac{f_1 g_{2,1} \alpha_1}{\omega_1 \omega_2} \right)^2 \left(\varepsilon \sigma_1 + 3\varepsilon \sigma_2 + \frac{c_{2,2}^2}{8\omega_2} - \frac{3g_{2,2}\alpha_1^2}{4\omega_2} - \frac{3g_{2,4}\alpha_2^2}{8\omega_2} \right)^2 - \\ & \left(\frac{g_{2,1}c_{1,1}\alpha_1^2}{\omega_2} + \frac{3g_{1,2}c_{2,2}\alpha_2^2}{\omega_1} \right)^2 = \left(\frac{g_{2,1}\alpha_1^3}{8\omega_2\alpha_2} \right)^2 - \frac{c_{2,2}^2}{4} \end{aligned} \quad (17)$$

3 算例与结果分析

以文献[8]中轴流带冠叶片为研究对象, 研究叶冠接触对叶片在组合共振条件下动力学特性的影响, 叶片的主要参数见表 1。

本节研究内容通过对比原始控制方程 (9) 数值解与多尺度法方程 (16) 解析解时域响应的差异, 验证了组合共振下多尺度法解析解的计算精度。其中, 数值积分采用变步长龙哥库塔法, 积分时间步长为 0.001 s。

图 3 中, 解析解为方程 (16) 在初值 $\alpha_{1-2} = 0.01, \beta_{1-2} = 0$ 下的时域响应, 数值解对应方程 (9) 在相同初值下的直接积分结果。对比发现, 数值解与解析解吻合良好。由于多尺度法省略位移高阶项, 一、二阶

表 1 柔性带冠叶片的主要参数^[8]
Tab.1 Gross parameters of the shrouded blade^[8]

符号	数值	符号	数值
c_v	10 N·s/m	e	0.25 m
E_1	5.41×10^4 N·m ²	E_A	1.08×10^9 N
k_s	3.55×10^6 N/m	L	1.05 m
m_1	40.13 kg/m	m_s	0.2 kg
Q_0	50	α	60°
δ_s	2.0×10^{-5} m	l	1
μ	0.3	Ω	6 900 r/min

模态在波峰和波谷处分别存在 1.9%和 16.1%的相对误差。由于二阶模态的振幅通常比一阶模态幅值小 1~2 个数量级, 且实际工程中测量得到的振动信号经过降噪处理后通常基于一阶模态振幅等效叶片振动响应, 从而二阶模态误差对工程问题的辨识无影响。因此, 第 2 节得到的多尺度法解析解可用于求解叶片在组合共振下的振动响应。

3.1 变结构参数下原始方程稳态响应

叶冠倾角 α 和叶冠法向接触刚度 k_s 的改变将直接影响叶冠间碰摩作用的强度。本节研究了方程 (9)

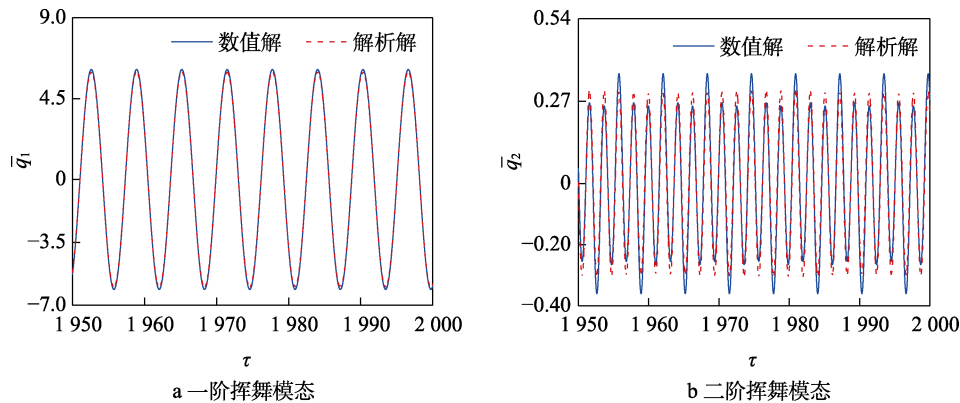


图 3 叶片稳态响应的解析解与数值解对比情况

Fig.3 Comparison of analytical and numerical solutions for steady-state response: a) the first flapwise modes; b) the second flapwise modes

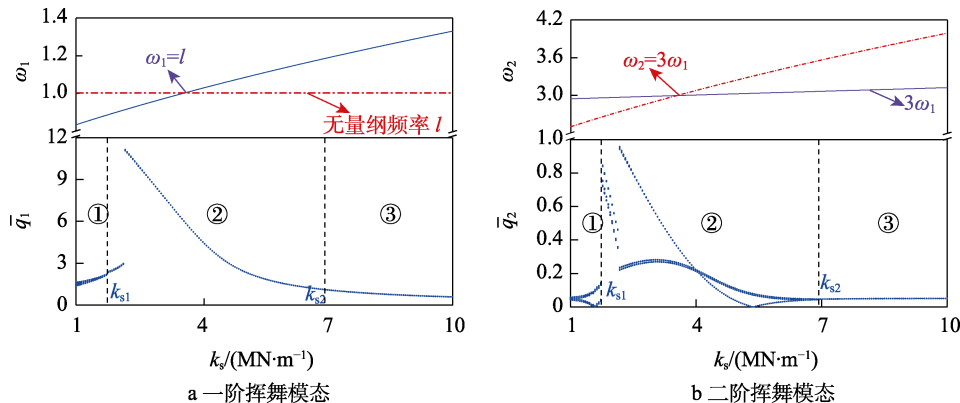


图 4 变 k_s 下叶片稳态响应分岔图

Fig.4 Bifurcation diagram of the blade versus k_s : a) the first flapwise modes; b) the second flapwise modes

在变 α 和 k_s 下的稳态响应, 分析了叶片非线性动力学特性随参数的变化规律。

1) 叶冠法向接触刚度对叶片稳态响应的影响。叶冠法向接触刚度通过改变相邻叶冠的接触状态及冠间碰摩载荷幅值影响叶片稳态响应的动力学特性, 分析带冠叶片振动特性随叶冠法向接触刚度的变化规律将为实际工程中叶冠结构的设计提供理论依据。实际工程中, 改变叶片材料种类或叶冠截面参数, 使叶冠的杨氏模量或叶片的挥舞方向刚度增大, 可以达到增大叶冠法向接触刚度的目的。提取不同叶冠法向接触刚度下庞加莱截面点的振幅, 绘制变 k_s 下叶片稳态响应的分岔图, 如图 4 所示, 其中 k_s 的取值范围为 1~10 MN/m。对比图 4a、b 发现, 叶冠法向接触刚度的整个参数取值范围可以被分为 3 个区间: 1 MN/m~ k_{s1} (区间①)、 k_{s1} ~ k_{s2} (区间②)、 k_{s2} ~10 MN/m (区间③)。其中, $k_{s1}=1.72$ MN/m 和 $k_{s2}=6.97$ MN/m 为区间分隔点。

图 4a 中, 一阶挥舞稳态响应 \bar{q}_1 在区间①~区间③内均表现为周期-1 振动。区间①中, \bar{q}_1 的时域响应存在明显的振幅振荡现象, 但在区间②和区间③中则几乎看不到这一现象。此外, 区间②中一阶挥舞模态频率变化曲线与外激励频率变化曲线存在交点

($\omega_1 = 1$)，这说明区间②参数下会发生一阶挥舞模态与气动载荷的主共振。因此，区间②中 \bar{q}_1 存在由主共振引起的幅值跳跃现象，并表现出硬弹簧特征（主共振的共振峰向外激励频率增大一侧弯曲的现象）。

图 4b 展示了二阶挥舞模态稳态响应 \bar{q}_2 关于叶冠法向接触刚度 k_s 的分岔图。在区间①和区间③中， \bar{q}_2 与 \bar{q}_1 的振动形式相同（均为周期-1 振动），但是在区间②中 \bar{q}_2 表现为周期-3 振动，并且可以观察到与 \bar{q}_1 相同的幅值跳跃现象和硬弹簧特征。这是由于前两阶挥舞模态间的内共振使系统能量在一二阶挥舞模

态间转换，造成了主共振引起的一阶挥舞模态的幅值跳跃现象和硬弹簧特征可以在二阶挥舞模态稳态响应中观察到。

在子区间①、②和③中分别选定一个 k_s ，绘制该 k_s 下叶片稳态响应的时域曲线和相图，如图 5~7 所示。对比发现，随 k_s 增大，一阶挥舞稳态响应始终为周期-1 振动，而二阶挥舞则由周期-1 变为周期-3，最后又变回周期-1 振动。另外，从图 5（区间①）中一、二阶挥舞模态时域响应可以观察到明显的振动幅值周期变化现象，并且前两阶挥舞模态振幅周期变

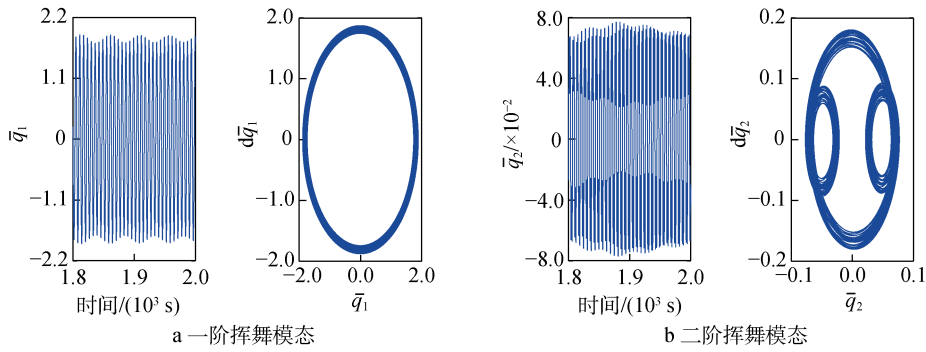


图 5 $k_s = 1.407$ MN/m 时带冠叶片稳态响应

Fig.5 Steady-state responses of the shrouded blade when $k_s = 1.407$ MN/m: a) the first flapwise modes; b) the second flapwise modes

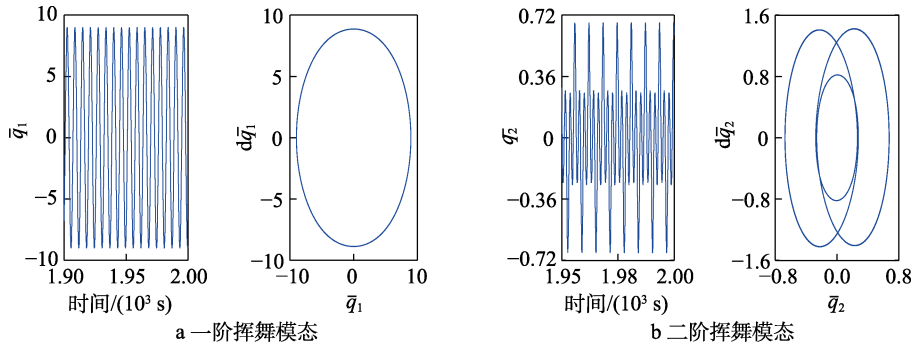


图 6 $k_s = 2.764$ MN/m 时带冠叶片稳态响应

Fig.6 Steady-state responses of the shrouded blade when $k_s = 2.764$ MN/m: a) the first flapwise modes; b) the second flapwise modes

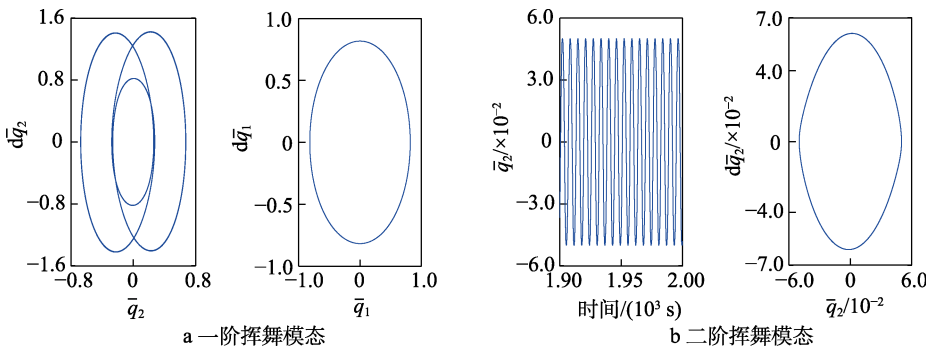


图 7 $k_s = 8.191$ MN/m 时带冠叶片稳态响应

Fig.7 Steady-state responses of the shrouded blade when $k_s = 8.191$ MN/m: a) the first flapwise modes; b) the second flapwise modes

化的相位相反。

2) 叶冠倾角对叶片稳态响应的影响。调整叶冠倾角可直接改变冠间碰摩载荷法线方向, 从而影响叶片弯曲振动位移, 最终造成带冠叶片动力学特性的改变。因此, 分析叶冠倾角对带冠叶片碰摩振动响应的影响对实际工程中结构设计具有一定意义。

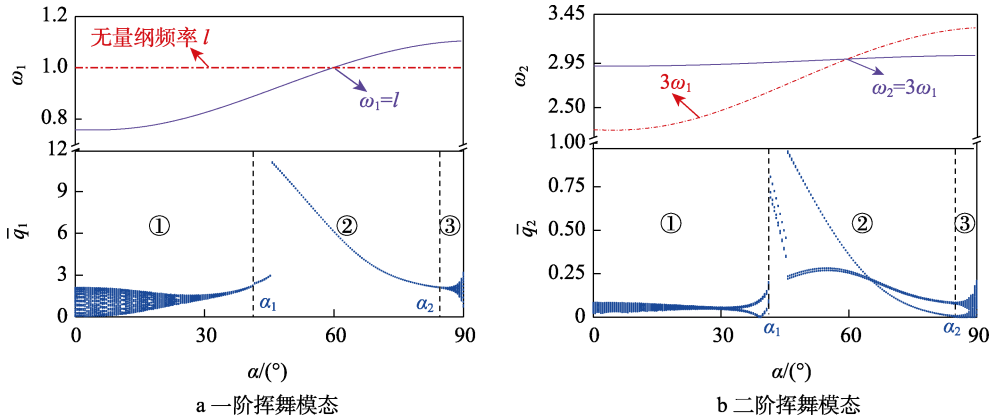


图 8 变叶冠倾角下带冠叶片稳态响应分岔图

Fig.8 Bifurcation diagram of the shrouded blade versus α : a) the first flapwise modes; b) the second flapwise modes

由图 8a 可以看出, 随 α 增大, \bar{q}_1 在区间①~③中先后表现为准周期、周期-1 及准周期振动。与图 4 相似, 从区间②中可以观察到气动载荷与一阶挥舞模态发生主共振 ($\omega_1=1$) 引起的共振峰, 以及主共振诱发的幅值跳跃现象和硬弹簧特征。

变 α 下的 \bar{q}_2 的分岔图见图 8b。可以看出, 区间①和③中 \bar{q}_2 表现为准周期振动, 而区间②中 \bar{q}_2 为周期-3 运动。此外, 区间②中 \bar{q}_2 表现出了与 \bar{q}_1 相同的幅值跳跃现象和硬弹簧特征。这表明, 在一、二阶挥舞模态间存在着二阶挥舞模态的主共振和前一阶挥舞模态的内共振组成的组合共振, 一阶挥舞模态主共振的动力学特性可以通过组合共振模态间的能量传递作用出现在二阶挥舞模态的稳态响应中。

3.2 变参数下组合共振瞬态及稳态响应

由 3.1 节的分析可知, 特定结构参数下带冠叶片将同时发生一阶挥舞模态的主共振和前一阶挥舞模态的 1:3 内共振, 从而表现出组合共振现象。

在表 1 参数下, 公式 (13) 中主共振和内共振的频率解谐参数分别为 $\varepsilon\sigma_1 = 6.56 \times 10^{-4}$ 和 $\varepsilon\sigma_2 = 2.60 \times 10^{-3}$, 然而忽略冠间碰摩作用时, $\varepsilon\sigma_1 = 0.242$ 且 $\varepsilon\sigma_2 = -0.650$ 。这说明忽略冠间碰摩作用下主共振和内共振不会同时发生。由于组合共振使叶片稳态响应的幅值和稳定性均会发生显著变化, 因此在实际设计中, 不能忽视带冠叶片相邻叶冠接触诱发的组合共振现象, 避免造成结构的有害振动, 甚至高周疲劳破坏。

本节通过计算不同参数条件下带冠叶片组合共振的瞬态及稳态振动响应, 分析了参数对组合共振下

图 8 绘制了不同叶冠倾角下叶片稳态响应的分岔图, 其中 α 的取值范围为 $0^\circ \sim 90^\circ$ 。基于稳态响应的振幅和周期特性, 可将叶冠倾角取值范围分为 3 个子区间: $0^\circ \sim \alpha_1$ (区间①)、 $\alpha_1 \sim \alpha_2$ (区间②)、 $\alpha_2 \sim 90^\circ$ (区间③), 其中 $\alpha_1 = 38.96^\circ$ 和 $\alpha_2 = 83.65^\circ$ 对应区间分隔点。

叶片瞬态及稳态响应的影响。在此之前, 需要给出叶片原始控制方程 (9) 的阻尼系数随叶冠法向接触刚度 k_s 的变化规律。定义原始振动控制方程第 k 阶模态的阻尼比 $\zeta_k = c_k / 2\omega_k$ 。由图 9 可以看出, 前两阶挥舞模态的阻尼比均随法向接触刚度 k_s 的增大而升高。

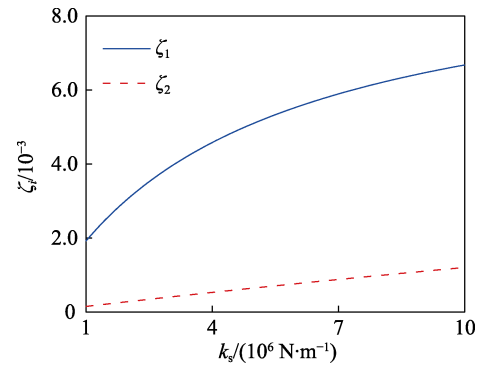


图 9 前两阶挥舞模态阻尼比

Fig.9 Damping ratio of the first two flapwise modes

1) 组合共振瞬态响应。任意初始位移扰动下, 组合共振系统将产生瞬态振动。计算并对比不同初始扰动下多尺度方程 (16) 的瞬态响应, 对研究组合共振下带冠叶片瞬态响应的动力学特性具有重要价值。由图 10 可以看出, 相同初值下, 前两阶挥舞模态振动幅值的转换频率相同, 但存在 π 的相位差。这表明当组合共振被激发后, 能量在两阶挥舞模态间转换, 由一阶挥舞模态传递到二阶挥舞模态, 或反向传递。对比图 10 和图 11 发现, 初值的变化基本不影响组合共振的瞬态响应幅值, 仅影响幅值转换频率, 振动初

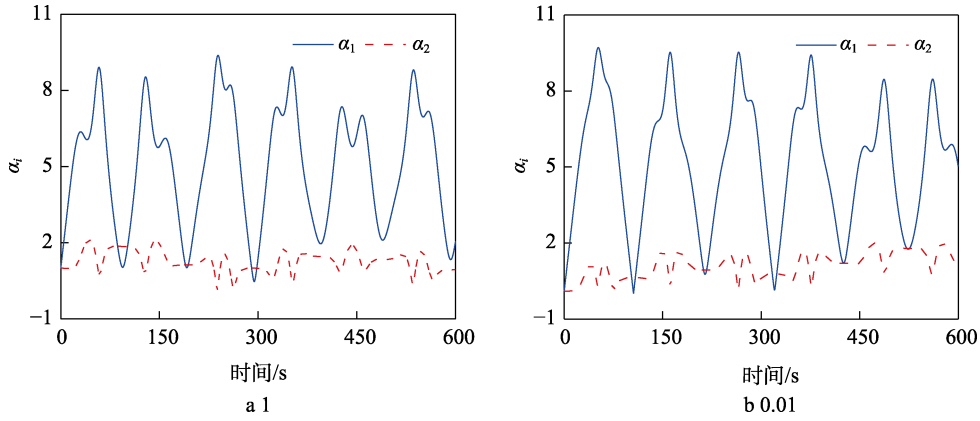


图 10 初值为 1、0.01 时组合共振瞬态响应 α_{1-2}

Fig.10 Transient responses of α_{1-2} under combination resonance when initial values equal 1 and 0.01

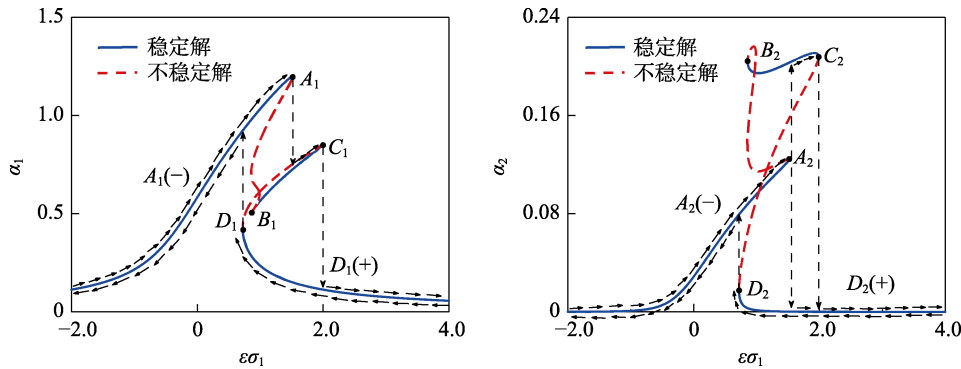


图 11 变 $\epsilon\sigma_1$ 对组合共振稳态响应 α_{1-2} 的影响

Fig.11 Effect of $\epsilon\sigma_1$ on steady-state responses of α_{1-2} under combination resonance: a) the first flapwise modes; b) the second flapwise modes

值越大瞬态响应幅值转换频率越高。

2) 组合共振稳态响应。气动载荷诱使叶片发生受迫振动,在短暂的瞬态振动过程后,结构将进入稳态振动阶段。对比不同频率解谐参数和叶冠法向接触刚度下方程(17)的稳态响应,有助于理解组合共振下带冠叶片的动力学特性。 $\epsilon\sigma_2 = 0$ 时,前两阶挥舞模态在不同主共振解谐参数 $\epsilon\sigma_1$ 下组合共振稳态响应的幅频曲线如图11所示,方程(8)中几何非线性项造成了叶片稳态响应中的硬弹簧效应。图11a中, α_1 存在4个跳跃点(A_1 、 B_1 、 C_1 和 D_1)、3段稳定域(A_1 左侧区域 $A_1(-)$ 、 $B_1\sim C_1$ 和 D_1 右侧区域 $D_1(+)$)和2段不稳定域($A_1\sim B_1$ 和 $C_1\sim D_1$)。3段稳定域和2段不稳定域内, α_1 分别为稳定的焦点和不稳定的鞍点。当 $\epsilon\sigma_1$ 处于跳跃点 A_1 和 C_1 对应解谐参数时,随 $\epsilon\sigma_1$ 增大, α_1 分别向下跳跃到 $B_1\sim C_1$ 和 $D_1(+)$ 。当 $\epsilon\sigma_1$ 处于跳跃点 D_1 对应解谐参数时,随 $\epsilon\sigma_1$ 减小, α_1 向上跳跃到 $A_1(-)$ 。当 $\epsilon\sigma_1$ 处于跳跃点 B_1 对应解谐参数时,随 $\epsilon\sigma_1$ 减小, α_1 既可能向上跳跃到 $A_1(-)$,也可能向下跳跃到 $D_1(+)$ 。

与一阶挥舞模态稳态响应类似,图12b中 α_2 的幅频曲线也存在4个跳跃点(A_2 、 B_2 、 C_2 和 D_2)、3

段稳定域(A_2 左侧区域: $A_2(-)$ 、 $B_2\sim C_2$ 和 D_2 右侧区域 $D_2(+)$)和2段不稳定域($A_2\sim B_2$ 、 $C_2\sim D_2$)。对比图13a、b中的响应幅值发现,在 $B_1\sim C_1$ 内, α_1 小于跳跃点 A_1 对应 α_1 ,然而稳定域 $A_2\sim B_2$ 内 α_2 均大于跳跃点 A_2 对应 α_2 。这造成了当 $\epsilon\sigma_1$ 处于跳跃点 A_2 对应解谐参数时,随 $\epsilon\sigma_1$ 增大, α_2 既可以向上跳跃到 $B_2\sim C_2$,又可以向下跳跃到 $D_2(+)$,而处在 B_2 对应解谐参数时,随解谐参数减小, α_2 只能向下跳跃到 $A_2(-)$ 。这种稳定域 $B_1\sim C_1$ 内 α_1 整体下降,而 α_2 整体上升的现象,说明脊骨线位置组合共振对系统的影响增强,这加强了耦合模态间的能量传递作用,由一阶挥舞模态传递到二阶挥舞模态的能量最多。

k_s 变为原始值的1/2和2倍时,叶片的稳态响应如图12和13所示。对比图11~13可以发现, k_s 减半后, α_{1-2} 的最大值显著升高,并且不稳定域 $A_2\sim B_2$ 、 $C_2\sim D_2$ 对应的解谐参数区间分别由 $\epsilon\sigma_1 \in (0.88, 1.52)$ 和 $(0.72, 2.00)$ 扩大至 $(0.84, 7.05)$ 和 $(0.83, 10.00)$ 。与之相反,当 k_s 扩大至原始值的2倍后, α_{1-2} 的跳跃点及相应不稳定域完全消失。分析可知,增大叶冠法向接触刚度提高了前两阶模态的阻尼比(见图9),从而抑制了结构振动,减小了不稳定域对应解谐参数区间的

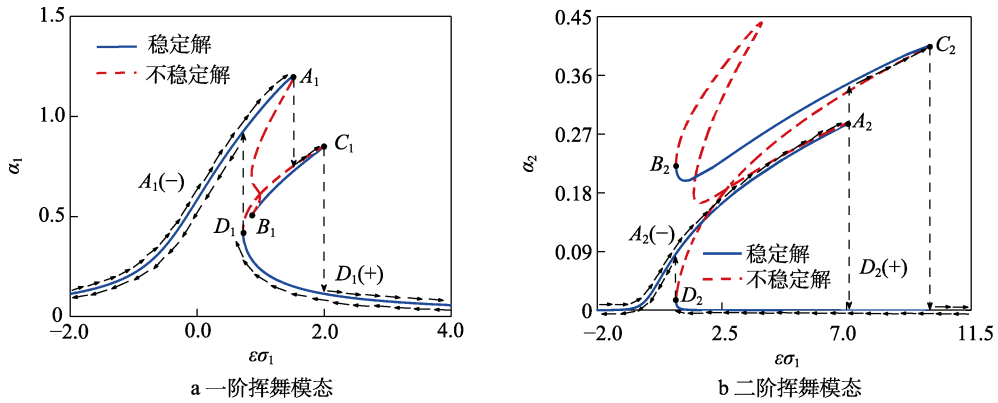


图 12 $0.5k_s$ 下变 $\varepsilon\sigma_1$ 对组合共振稳态响应 α_{1-2} 的影响

Fig.12 Effect of $\varepsilon\sigma_1$ on steady-state responses of α_{1-2} under combination resonance when $0.5k_s$: a) the first flapwise modes; b) the second flapwise modes

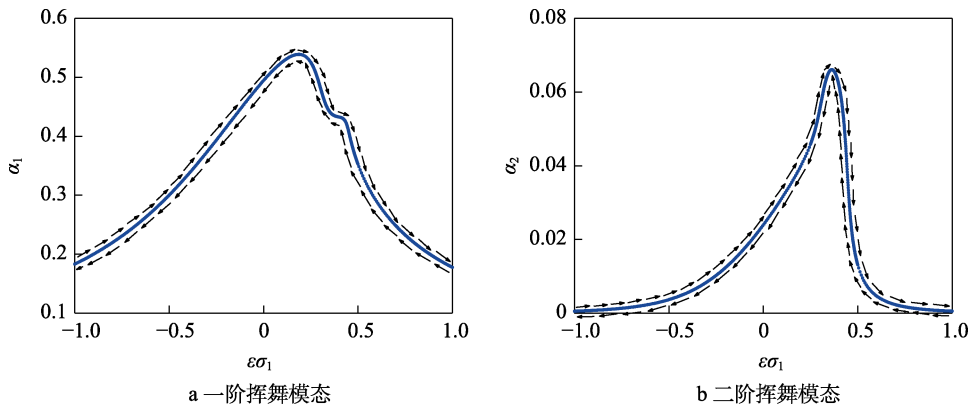


图 13 $2k_s$ 下变 $\varepsilon\sigma_1$ 对组合共振稳态响应 α_{1-2} 的影响

Fig.13 Effect of $\varepsilon\sigma_1$ on steady-state responses of α_{1-2} under combination resonance when $2k_s$: a) the first flapwise modes; b) the second flapwise modes

宽度; 当阻尼过高时, 稳态响应中的不稳定域被完全抑制。

$\varepsilon\sigma_1=0$ 时, 变内共振解谐参数 $\varepsilon\sigma_2$ 下叶片前两阶挥舞组合共振的幅频曲线如图 14 所示, 揭示了叶片稳态响应随 $\varepsilon\sigma_2$ 的变化规律。方程 (8) 中几何非线性项使叶片稳态响应表现出软弹簧特征。图 14a 中,

α_1 存在 2 个跳跃点 (A_1 、 B_1)、2 段稳定域 (A_1 左侧区域 $A_1(-)$ 、 B_1 右侧区域 $B_1(+)$) 和一段不稳定域 ($A_1 \sim B_1$)。当 $\varepsilon\sigma_2$ 处于 A_1 对应解谐参数时, 随 $\varepsilon\sigma_2$ 增大, α_1 向下跳跃到 $B_1(+)$ 。当 $\varepsilon\sigma_2$ 处于 B_1 对应解谐参数时, 随 $\varepsilon\sigma_2$ 减小, α_1 向上跳跃到 $A_1(-)$ 。

α_2 存在 2 个跳跃点 (A_2 、 B_2)、2 段稳定域 (A_2

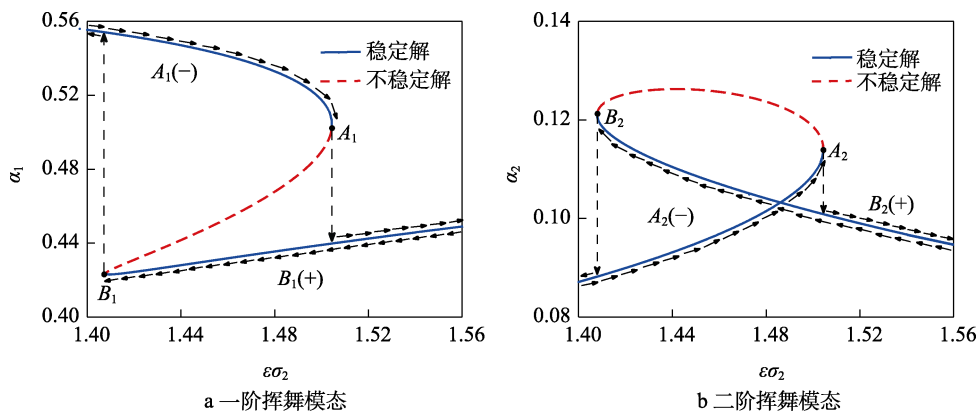


图 14 变 $\varepsilon\sigma_2$ 对组合共振稳态响应 α_{1-2} 的影响

Fig.14 Effect of $\varepsilon\sigma_2$ on steady-state responses of α_{1-2} under combination resonance: a) the first flapwise modes; b) the second flapwise modes

左侧区域 $A_2(-)$ 、 B_2 右侧区域 $B_2(+)$) 和一段不稳定域 ($A_2 \sim B_2$)。 $A_2(-)$ 内, α_2 随 $\varepsilon\sigma_2$ 的增大而增大。然而, $B_2(+)$ 内, α_2 随 $\varepsilon\sigma_2$ 增大而减小。这是由于 $\varepsilon\sigma_2$ 对应内共振模态间的频率差, 该频率差值处于脊骨线 (共振峰) 附近频率区间时, 内共振对结构的影响最强, 由一阶挥舞模态传递到二阶挥舞模态的能量最多, 最终造成了该频率区间中 α_1 减小而 α_2 增大。

0.5 和 2 倍 k_s 下叶片的稳态响应如图 15 和 16 所示。对比发现, 0.5 倍 k_s 下, α_{1-2} 的最大值显著增大, 不稳定域 $A_i \sim B_i$ 对应的解谐参数区间由 $\varepsilon\sigma_2 \in (1.41, 1.50)$ 增大至 $(1.42, 1.68)$ 。当 2 倍 k_s 下, α_{1-2} 的不稳定域及相应的跳跃点完全消失。如前所述, 这同样是由于增大叶冠法向接触刚度增强了叶片阻尼 (见图 9), 而阻尼的增大最终减弱了叶片振动幅值。

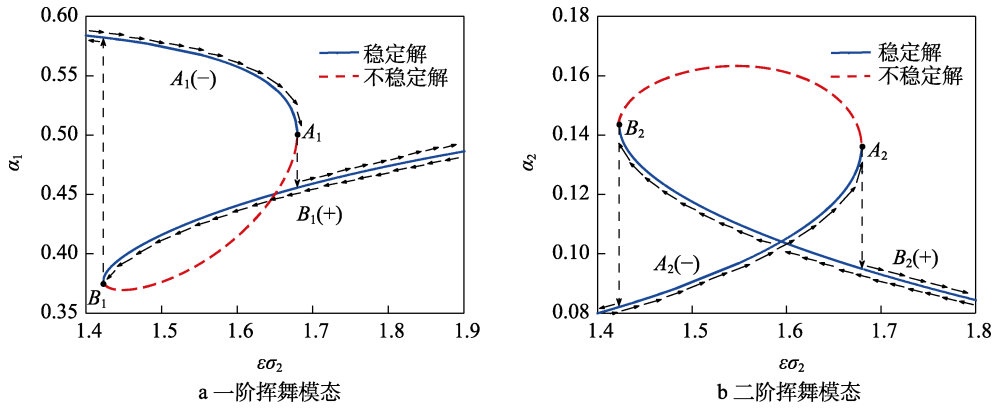


图 15 0.5 k_s 下变 $\varepsilon\sigma_2$ 对组合共振稳态响应 α_{1-2} 的影响

Fig.15 Effect of $\varepsilon\sigma_2$ on steady-state responses of α_{1-2} under combination resonance when $0.5k_s$: a) the first flapwise modes; b) the second flapwise modes

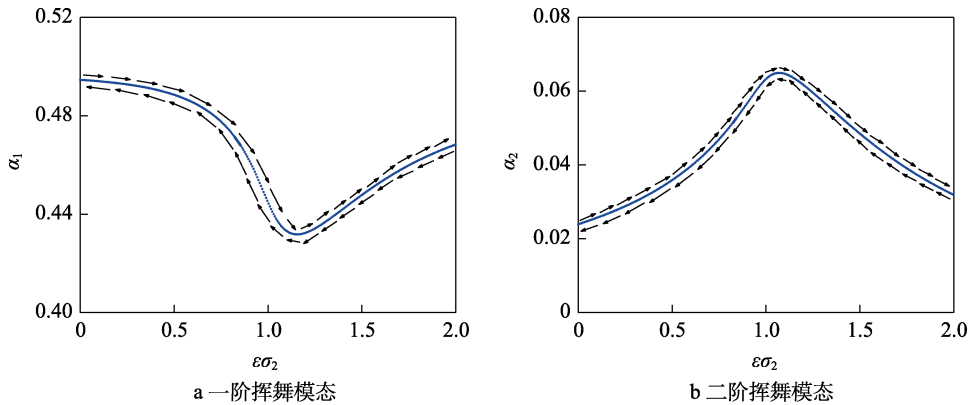


图 16 2 k_s 下变 $\varepsilon\sigma_2$ 对组合共振稳态响应 α_{1-2} 的影响

Fig.16 Effect of $\varepsilon\sigma_2$ on steady-state responses of α_{1-2} under combination resonance when $2k_s$: a) the first flapwise modes; b) the second flapwise modes

4 结论

本研究分析了面内碰摩作用下带冠叶片组合共振的动力学特性, 其中组合共振为一阶挥舞模态主共振和前两阶挥舞 1 : 3 内共振的组合。首先, 基于谐波平衡法和多尺度法建立了组合共振下带冠叶片的控制方程。随后, 计算了叶片原始方程在不同设计参数下的稳态响应, 发现了响应中的组合共振现象。最后, 分析了组合共振下多尺度方程瞬态及稳态响应随参数的变化规律。研究发现, 特定参数条件下, 带冠叶片将发生组合共振, 然而忽略接触非线性影响时, 内共振和主共振将不会同时发生, 从而不存在组合共振现象。瞬态响应表明, 外激励通过主共振传递到一

阶挥舞模态的能量基于内共振模态间的耦合作用传递到二阶挥舞模态。稳态响应表明, 几何非线性使前 2 节挥舞模态可以相互传递能量, 在共振峰附近时能量传递作用最强。改变叶冠法向接触刚度将会影响叶片阻尼, 增大法向接触刚度可以增强阻尼, 从而抑制稳态响应幅值, 并缩窄不稳定域的宽度。本研究的结论丰富了带冠叶片动力学特性的研究成果, 揭示了组合共振下叶片动力学特性随参数的变化规律, 为组合共振下叶片的减振设计提供了理论依据和设计思路。

参考文献:

[1] CIGEROGLU E. Development of Microslip Friction

- Models and Forced Response Prediction Methods for Frictionally Constrained Turbine Blades[D]. Columbus: The Ohio State University, 2007.
- [2] XIE F T, MA H, CUI C, et al. Vibration Response Comparison of Twisted Shrouded Blades Using Different Impact Models[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, 397: 171-191.
- [3] ZHOU X D, HUANG K F, LI Z. Geometrically Nonlinear Beam Analysis of Composite Wind Turbine Blades Based on Quadrature Element Method[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2018, 104: 87-99.
- [4] 麻岳敏, 曹树谦, 郭虎伦. 考虑弯扭耦合运动的旋转带冠叶片非线性气动弹性分析[J]. *振动与冲击*, 2019, 38(2): 67-74.
- MA Y M, CAO S Q, GUO H L. Nonlinear Aeroelastic Analysis of Rotating Shrouded Blades under Coupled Bending and Torsional Vibration[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(2): 67-74.
- [5] 谢方涛, 崔璨, 马辉, 等. 一种求解干摩擦带冠叶片动力学响应的方法[J]. *振动工程学报*, 2018, 31(1): 110-117.
- XIE F T, CUI C, MA H, et al. An Approach to Calculate the Dynamic Response of Shrouded Blade with Dry Friction[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2018, 31(1): 110-117.
- [6] 何冰冰, 任兴民, 何尚文, 等. 考虑分离和重新接触的涡轮自带冠叶片振动特性分析[J]. *西北工业大学学报*, 2018, 36(2): 308-314.
- HE B B, REN X M, HE S W, et al. Vibration Characteristics Analysis of Integrally Shrouded Turbine Blade Considering Separation and Reattachment[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2018, 36(2): 308-314.
- [7] 王威涛, 南国防. 基于哈密尔顿原理和谐波平衡法研究带冠叶片的振动特性[J]. *动力工程学报*, 2020, 40(2): 117-122.
- WANG W T, NAN G F. Study on Vibration Characteristics of Shrouded Blades Based on Hamilton Principle and Harmonic Balance Method[J]. *Journal of Chinese Society of Power Engineering*, 2020, 40(2): 117-122.
- [8] SHADMANI M, TIKANI R, ZIAEI-RAD S. On Using a Distributed-Parameter Model for Modal Analysis of a Mistuned Bladed Disk Rotor and Extracting the Statistical Properties of Its In-Plane Natural Frequencies[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 438: 324-343.
- [9] PETROV E P. Method for Direct Parametric Analysis of Nonlinear Forced Response of Bladed Disks with Friction Contact Interfaces[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2004, 126(4): 654-662.
- [10] SHE H X, LI C F, TANG Q S, et al. Veering and Merging Analysis of Nonlinear Resonance Frequencies of an Assembly Bladed Disk System[J]. *Journal of Sound Vibration*, 2021, 493: 115818.
- [11] YANG B D, MENQ C H. Characterization of 3D Contact Kinematics and Prediction of Resonant Response of Structures Having 3D Frictional Constraint[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 217(5): 909-925.
- [12] 谢永慧, 张荻. 汽轮机阻尼围带长叶片振动特性研究[J]. *中国电机工程学报*, 2005, 25(18): 86-90.
- XIE Y H, ZHANG D. Numerical Model for Vibration Characteristic of Steam Turbine Blade with Damped Shroud[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2005, 25(18): 86-90.
- [13] KARIMI B, MORADI H. Nonlinear Kinematics Analysis and Internal Resonance of Wind Turbine Blade with Coupled Flapwise and Edgewise Vibration Modes[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 435: 390-408.
- [14] 顾伟, 张博, 丁虎, 等. 2:1 内共振条件下变转速预变形叶片的非线性动力学响应[J]. *力学学报*, 2020, 52(4): 1131-1142.
- GU W, ZHANG B, DING H, et al. Nonlinear Dynamic Response of pre-Deformed Blade with Variable Rotational Speed under 2:1 Internal Resonance[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(4): 1131-1142.
- [15] ZHANG W, LIU G, SIRIGULENG B. Saturation Phenomena and Nonlinear Resonances of Rotating Pretwisted Laminated Composite Blade under Subsonic Air Flow Excitation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 478: 115353.
- [16] CHU S M, CAO D Q, SUN S P, et al. Impact Vibration Characteristics of a Shrouded Blade with Asymmetric Gaps under Wake Flow Excitations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 72(3): 539-554.
- [17] 秦营, 刘启宽, 李亮, 等. 风力机叶片非线性摆振响应及稳定性分析[J]. *力学季刊*, 2013, 34(1): 41-48.
- QIN Y, LIU Q K, LI L, et al. Analysis of the Dynamic Response and Stability for Non-Linear Lead-Lag Vibrations of Wind Turbine Blades[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2013, 34(1): 41-48.
- [18] P FRANK P, BERND R, MARK J S. Non-Linear Vibration Absorbers Using Higher Order Internal Resonances[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 234(5): 799-817.
- [19] LI L, LI Y H, LIU Q K, et al. Flapwise Non-Linear Dynamics of Wind Turbine Blades with both External and Internal Resonances[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2014, 61: 1-14.
- [20] YUAN G F, WANG Y F. Internal, Primary and Combination Resonances of a Wind Turbine Blade with Coupled Flapwise and Edgewise Motions[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, 514: 116439.
- [21] 卢绪祥, 黄树红, 刘正强, 等. 汽轮机自带冠叶片碰撞减振的研究现状与发展[J]. *振动与冲击*, 2010, 29(2): 11-16.
- LU X X, HUANG S H, LIU Z Q, et al. Impact-Damping Studies for Integral Shroud Blades of a Turbine Machinery[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2010, 29(2): 11-16.

- [22] 何冰冰. 涡轮叶片干摩擦阻尼器动力学特性及减振特性研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2018.
HE B B. Study on Dynamic Characteristics and Vibration Reduction Characteristics of Turbine Blade Dry Friction Damper[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2018.
- [23] HE S W, SI K L, HE B B, et al. Rub-Impact Dynamics of Shrouded Blades under Bending-Torsion Coupling Vibration[J]. Symmetry, 2021, 13(6): 1073.
- [24] MASHAYEKHI F, NOBARI A S, ZUCCA S. Hybrid Reduction of Mistuned Bladed Disks for Nonlinear Forced Response Analysis with Dry Friction[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2019, 116: 73-84.
- [25] NAN G F, LOU J Y, SONG C C, et al. A New Approach for Solving Rub-Impact Dynamic Characteristics of Shrouded Blades Based on Macroslip Friction Model[J]. Shock and Vibration, 2020, 2020: 8147143.