

# 基于二级近似的航天器结构的 模型修正方法

李建宏宇<sup>1</sup>, 庞贺伟<sup>2</sup>

(1. 北京卫星环境工程研究所 可靠性与环境工程技术重点实验室, 北京 100094;

2. 中国空间技术研究院, 北京 100094)

**摘要:** **目的** 基于航天器结构自由度数大且结构复杂, 直接对有限元模型修正计算效率低的问题, 利用二级近似方法来提高有限元模型修正的计算效率。**方法** 根据特征向量建立 Ritz 空间推导出频率响应及其敏感度的一级近似计算公式, 利用近似函数二级近似计算结构参数变化后的动刚度矩阵, 通过多重优化流程消除近似计算引入的误差。**结果** 通过两个数值算例进行验证, 该方法提高了结构模型修正的计算效率。**结论** 该方法适用于航天器结构的模型修正。

**关键词:** 模型修正; 频率响应; 敏感度分析; 近似计算; 多重优化

**DOI:** 10.7643/issn.1672-9242.2018.11.008

**中图分类号:** TB123

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1672-9242(2018)11-0044-05

## Model Updating of Spacecraft Structure Based on Two-level Approximate Function

LI Jian-hong-yu<sup>1</sup>, PANG He-wei<sup>2</sup>

(1. Science and Technology on Reliability and Environmental Engineering Laboratory, Beijing Institute of Spacecraft Environment Engineering, Beijing 100094, China; 2. China Academy of Space Technology, Beijing 100094, China)

**ABSTRACT: Objective** To improve the computational efficiency of model updating with two-level approximation method based on large-scale degrees of freedom and the complexity of the spacecraft structure. **Methods** The first-level approximate calculation formula for frequency response and its sensitivity was derived with Ritz space based on eigenvectors. The dynamic stiffness matrix after structural parameter changes was calculated by approximation function. The errors caused by approximate calculation were eliminated by multiple optimization. **Results** The method improved the computational efficiency of model updating by two numerical examples. **Conclusion** The method is suitable for model updating of spacecraft structure.

**KEY WORDS:** model updating; frequency response; sensitivity analysis; approximate calculation; multiple optimization

航天技术的进步和任务需求的扩展, 特别是遥感卫星分辨率性能指标的不断提高, 对航天器结构的动力学模型的准确性要求越来越高<sup>[1]</sup>。在轨微振动环境影响遥感卫星的分辨率, 因此对于微振动分析, 不仅要求航天器结构的动力学模型的模态频率准确, 还需要提高频率响应计算的准确性。

根据动力学实验产生的频率响应对结构的动力学模型进行修正是提高模型精度的重要方法<sup>[2-3]</sup>。模型修正问题实际是一个结构优化问题<sup>[4]</sup>, 目标是最小化实验实测数据和分析结果数据之间的误差。模型修正理论应用到航天器结构中, 将面临严重的效率问题。对于航天器结构, 其有限元模型的自由度数达到

收稿日期: 2018-08-22; 修订日期: 2018-09-22

作者简介: 李建宏宇(1989—), 男, 吉林人, 博士研究生, 主要研究方向为模型修正、结构优化、结构动力学。

通讯作者: 庞贺伟(1961—), 男, 辽宁人, 博士, 研究员, 主要研究方向为结构动力学、可靠性、环境工程。

十万<sup>[5-6]</sup>，甚至更高，对其进行频率响应分析需要耗费大量的计算成本和存储成本。因此直接对航天器有限元模型进行修正，需要的时间成本是不可接受的。

模型缩聚<sup>[7]</sup>最早提出是用于提高大规模有限元模型的结构动力学分析的计算效率和减少计算机存储空间的使用，是一种近似模型。近些年，模型缩聚主要用于基于试验测量的模型修正，将模型缩聚到实验测量的自由度上，缩聚后动力学模型自由度的个数等于实验测量自由度的个数。动力学实验中传感器的数量和位置受实验条件的限制，影响缩聚后模型的精度。缩聚后的模型往往只能近似表达低频段的动力学特征，无法正确反映中高频段的动力学特征。

文中首次利用二级近似算法，在模型修正过程中高效率地计算结构参数修改后结构的频率响应，并建立多重优化流程消除近似计算引入的误差。

## 1 频率响应及其灵敏度的近似计算

### 1.1 一级近似计算

Ritz 法的基本假设是用  $r$  个  $n$  维形状向量  $\{\Psi_i\}$  和幅值  $\alpha_i$  线性表示位移向量，写成矩阵形式为：

$$\{x\} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \{\Psi_i\} = [\Psi] \{\alpha\}$$

在模型修正过程中，以初始结构的前  $r$  阶特征向量为形状向量来表示结构的位移响应。设初始结构的刚度矩阵为  $[K_0]$ ，初始结构的质量矩阵为  $[M_0]$ 。则形状向量满足条件：

$$[K_0] \{\Psi_i\} = \lambda_i [M_0] \{\Psi_i\}$$

动刚度矩阵为：

$$[Z] = [K] - \omega^2 [M] = ([K_0] - \omega^2 [M_0]) + ([\Delta K] - \omega^2 [\Delta M]) = [Z_0] + [\Delta Z]$$

在载荷  $\{F(\omega)\}$  的作用下，结构的位移向量频率响应为：

$$[Z] \{x(\omega)\} = \{F(\omega)\}$$

将 Ritz 法带入动力学方程并左乘  $[\Psi]^T$ ：

$$[\Psi]^T [Z] [\Psi] \{\alpha\} = [\Psi]^T \{F(\omega)\}$$

可以得到位移的频率响应：

$$\{x(\omega)\} = [\Psi] ([\Psi]^T [Z] [\Psi])^{-1} ([\Psi]^T \{F(\omega)\})$$

其中：

$$\begin{aligned} ([\Psi]^T [Z] [\Psi])^{-1} &= ([\Psi]^T ([Z_0] + [\Delta Z]) [\Psi])^{-1} = \\ &= \{ [I] + ([\Psi]^T [\Delta Z] [\Psi]) ([\Psi]^T [Z_0] [\Psi])^{-1} \cdot \\ &= ([\Psi]^T [Z_0] [\Psi])^{-1} = \\ &= ([\Psi]^T [Z_0] [\Psi])^{-1} [I] + ([\Psi]^T [\Delta Z] [\Psi]) \cdot \\ &= ([\Psi]^T [Z_0] [\Psi])^{-1} \end{aligned}$$

设：

$$[H_0] = ([\Psi]^T [Z_0] [\Psi])^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 - \omega^2 & & \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_r - \omega^2} \end{bmatrix}$$

得到位移的频率响应的一级近似计算公式：

$$\{x(\omega)\} = [\Psi] [H_0] ([I] +$$

$$[\Psi]^T [\Delta Z] [\Psi] [H_0])^{-1} ([\Psi]^T \{F(\omega)\})$$

对于结构参数  $p$  的灵敏度公式为：

$$\frac{\partial \{x(\omega)\}}{\partial p} = -[\Psi] [H_0] ([I] + [\Psi]^T [\Delta Z] [\Psi] [H_0])^{-1} \cdot$$

$$\frac{\partial [\Psi]^T [\Delta Z] [\Psi]}{\partial p} ([I] + [\Psi]^T [\Delta Z] [\Psi] [H_0])^{-1} ([\Psi]^T \{F(\omega)\})$$

一级近似计算公式中，矩阵运算为  $r$  阶矩阵运算，而  $r$  远小于结构的自由度数，所以具有较高的计算效率。

第一级近似引入的误差分为两部分：

1) 由于仅考虑前  $r$  阶模态的叠加，产生的截断误差。可以通过增加  $r$  值的大小，减少误差，同时  $r$  值增大将降低计算效率。一般经验， $r$  可以根据动力学实验的频段进行选择。动力学试验测量的最高频率点为  $m$  Hz，则计算频率小于  $3m$  Hz 的所有模态。

2) 模型修正过程中对结构参数进行调整后，结构的特征向量也发生变化并导致前  $r$  阶特征向量组成的 Ritz 空间也发生相应变化。考虑到航天器有限元模型建模技术比较成熟，模型修正过程中仅对模型的结构参数进行微小调整。结构参数修改前后的 Ritz 空间是相近的，同时，可以引入多重优化流程来消除近似计算的误差。

### 1.2 频率响应函数及其灵敏度的二级近似计算

在计算频率响应及其灵敏度过程中，需要计算

$$[\Psi]^T [\Delta Z] [\Psi] \text{ 和 } \frac{\partial [\Psi]^T [\Delta Z] [\Psi]}{\partial p}$$

。  $[\Delta Z]$  可以通过调用 Nastran 计算。对于航天器结构，动刚度矩阵组装需要耗费的时间不可忽略，同时  $[\Delta Z]$  为  $n$  阶对称稀疏矩阵，数据的存储需要存储成本。而  $[\Psi]^T [\Delta Z] [\Psi]$  为  $r$  阶矩阵，其计算的时间成本和存储成本远低于直接计算  $[\Delta Z]$ 。在优化迭代过程中，用近似函数代替  $[\Psi]^T [\Delta Z] [\Psi]$  的计算，可以提高频率响应计算的效率。这是频率响应函数的二级近似计算。

文中采用一种改进的 Hermit 插值方法<sup>[8]</sup>。其形式与 Hermit 差值类似，通过增加非线性参数  $r$  来提高插值的准确性。设  $F(x)$  为原函数， $\bar{F}(x)$  为近似函数； $x$  的维数为  $n$ ； $h$  个已知原函数函数值和灵敏度值的点  $x^j$ 。

构造如下的近似函数  $\bar{F}(x)$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{F}(x) &= F(x^j), (x = x^j) \\ w_j(x) &= \frac{1}{\sum_{k=1}^h \frac{1}{|x-x^k|^2}} \\ \tilde{F}_j(x) &= F(x^j) + \sum_r \frac{1}{r_k} (x_k)^{1-r} \left[ (x_k)^{r_k} - (x_k^j)^{r_k} \right] \frac{\partial F(x)}{\partial x_k} \Big|_{x=x^j} \\ \bar{F}(x) &= \sum_{j=1}^h w_j(x) \tilde{F}_j(x), (x \neq x^j) \end{aligned} \right.$$

$[\Psi]^T [\Delta Z] [\Psi]$  和  $[\Delta Z]$  与结构参数的非线性关系是相同的, 同时  $[\Delta Z]$  与结构参数的非线性关系是可以预测的, 且大部分是代数式关系。典型的结构参数如材料的弹性模量、密度、板厚、杆的截面积等, 与  $[\Delta Z]$  均为线性关系。可以根据结构参数的属性确定  $r$  值。通过二级近似后, 频率响应的计算效率得到了提高。

## 2 优化模型与多重优化流程

模型修正问题为无约束的优化问题。目标函数是描述理论模型特性和实验模型特性相关程度的一个表达式。文中采用 Zang<sup>[9]</sup> 引入的频率响应相关性指标准则作为目标函数:

$$F = \frac{|\{H^t\}^H \{H^a\}|^2}{(\{H^t\}^H \{H^t\})(\{H^a\}^H \{H^a\})}$$

拟牛顿法是无约束最优化方法中最有效的一类算法。其优点为: 迭代中仅需要一阶导数, 具有二次终止性, 对于一般情况, 具有超线性收敛速率。文中将采用拟牛顿法作为优化算法。

图 1 为多重优化流程。该流程的优点是通过两次引入近似计算, 提高目标函数的计算效率, 同时通过多重优化保证优化结果的准确性。

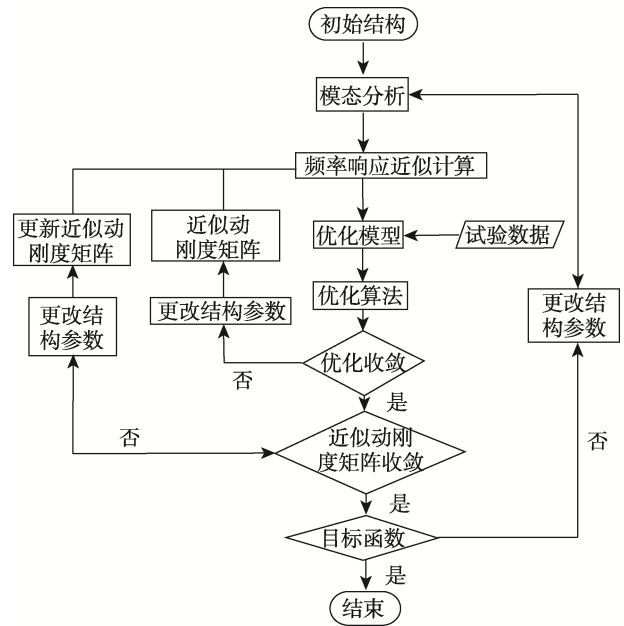


图 1 多重优化流程

## 3 数值算例

### 3.1 GARTEUR 梁的模型修正

以 GARTEUR 梁结构为算例进行模型修正。GARTEUR 梁结构如图 2 所示, 为平面钢架结构。有限元模型由 74 个节点、78 个梁单元构成。每个节点的自由度为 3, 为  $x, y$  两个方向的平动自由度和  $xy$  面的转动自由度。其材料参数为:  $E=7.5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  $\rho=2.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu=0.3$ 。梁截面面积为: 水平梁  $S_x=0.004 \text{ m}^2$ , 竖直梁  $S_y=0.006 \text{ m}^2$ , 对角梁  $S_d=0.003 \text{ m}^2$ 。各梁的截面惯性距均为  $I=0.0756 \text{ m}^4$ 。

选取结构中的 21 个自由度测量频率响应。在 1,2 节点的  $y$  方向施加振幅为  $1 \times 10^6 \text{ N}$  的正弦载荷, 对结

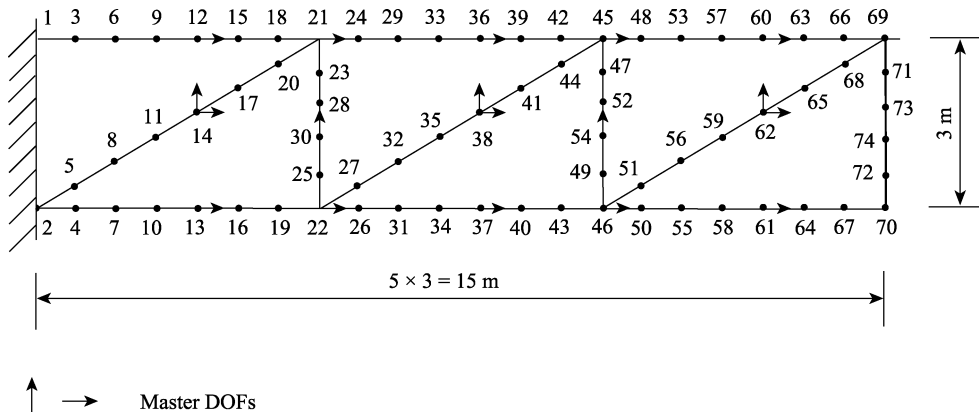


图 2 GARTEUR 梁结构

构在频段 5~505 Hz 进行频率响应分析。为了构造动力学实验产生的频率响应数据作为参考值,采用更加密集的网格划分并使用直接法分析频率响应。通过模态分析可知,结构小于 1515 Hz 的频率共有 41 阶。

以梁的截面积作为模型修正需要修正的结构参数。初始结构的梁截面面积为:水平梁  $S_x=0.005 \text{ m}^2$ , 竖直梁  $S_y=0.005 \text{ m}^2$ , 对角梁  $S_d=0.005 \text{ m}^2$ 。目标函数的迭代曲线如图 3 所示,经过 18 次迭代,模型修正结束。在整个模型修正过程中,进行了 2 次模态分析和 4 次结构动刚度矩阵的组装,其他迭代计算都是近似计算。为模型修正前后结构参数的误差。

### 3.2 CMG 平台的模型修正

某卫星 CMG 平台由超过 380 000 个有限单元和 110 000 个节点组成。有限元模型的自由度超过 370 000,CMG 平台有通过 5 组共 15 个隔振器与底座连接,隔振器有限单元属性为 PBUSH,局部模型如图

4 所示。以 PBUSH 的刚度为模型修正的结构参数,对结构在频段 1~300 Hz 进行频率响应分析,近似计算中取结构前 200 阶模态。

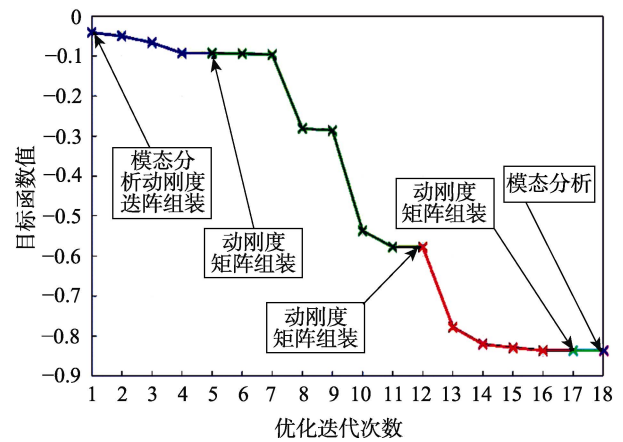


图 3 目标函数迭代曲线

表 1 模型修正结果

|       | 基准值/ $\text{m}^2$ | 初始值              |        | 修正值              |        |
|-------|-------------------|------------------|--------|------------------|--------|
|       |                   | 面积/ $\text{m}^2$ | 相对误差/% | 面积/ $\text{m}^2$ | 相对误差/% |
| $S_x$ | 0.004             | 0.005            | 25     | 0.003 903 3      | -2.4   |
| $S_y$ | 0.006             | 0.005            | -16.7  | 0.005 843        | -2.6   |
| $S_d$ | 0.003             | 0.005            | -98.3  | 0.003 011        | 0.37   |

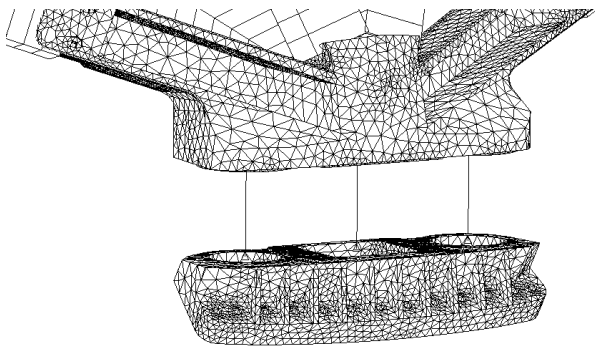


图 4 隔振器与底座的局部模型

经过 360 次迭代,模型修正结束。在整个过程中,进行了 3 次模态分析,17 次动刚度矩阵组装,360 次近似计算。整个模型修正过程中计算时间成本分布见表 2。模型修正前后典型测量点的位移频率响应如图 5 所示。模型修正后,频率响应曲线的误差得到了明显改善。

表 2 计算时间成本分布

|          | 模态分析 | 动刚度矩阵组装 | 近似计算 | 其他  |
|----------|------|---------|------|-----|
| 计算时间成本/s | 1166 | 723     | 577  | 359 |
| 总计算时间    | 41   | 26      | 20   | 13  |
| 成本占比/%   |      |         |      |     |

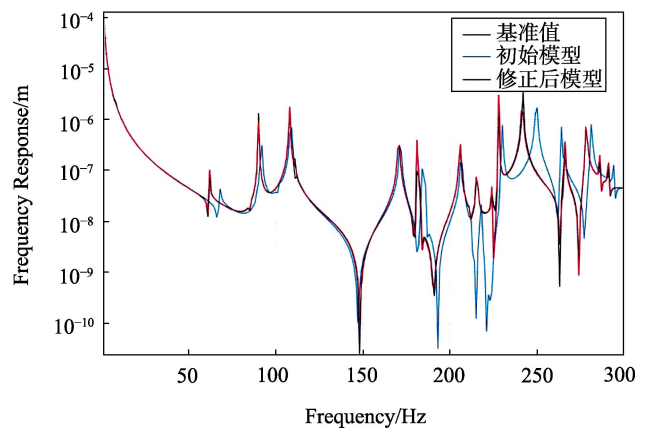


图 5 模型修正前后典型测量点的位移频率响应

## 4 结语

航天器结构自由度数高且结构复杂,在模型修正过程中不易对有限元模型直接进行修正。文中基于特征向量构建 Ritz 空间,并推导出结构频率响应的近似计算公式。之后根据动力学实验的频段选择相应的模态阶数来减小截断误差,通过多重优化算法消除近似误差。引入近似函数计算动刚度矩阵,减小迭代过程中的计算成本和存储成本。两个数值算例证明了该方法的准确性和高效性,因此该方法适用于实际航天器结构模型修正的工程应用。

## 参考文献:

- [1] ZHOU W, LI D. Experimental Research on a Vibration Isolation Platform for Momentum Wheel Assembly[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2013, 332(5): 1157-1171.
- [2] NATKE H G. Updating Computational Models in the Frequency Domain Based on Measured Data: A Survey[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1988, 3(1): 28-35.
- [3] LIN R M, ZHU J. Finite Element Model Updating Using Vibration Test Data under Base Excitation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 303(3/4/5): 596-613.
- [4] IMREGUN M, VISSER W J, EWINS D J. Finite Element Model Updating Using Frequency Response Function Data: I. Theory and Initial Investigation[J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 1995, 9(2): 187-202.
- [5] YUAN Z X, YU K P. Finite Element Model Updating of Damped Structures Using Vibration Test Data under Base Excitation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 340: 303-316.
- [6] 丁继锋, 韩增尧, 马兴瑞. 大型复杂航天器结构有限元模型的验证策略研究[J]. *宇航学报*, 2010, 31(2): 547-555.
- [7] GUYAN R J. Reduction of Stiffness and Mass Matrices[J]. *AIAA Journal*, 1965, 3(2): 380.
- [8] HUANG H, XIA R W. Two-level Multipoint Constraint Approximation Concept for Structural Optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1995, 9(1): 38-45.
- [9] ZANG C, FRISWELL M I, IMREGUN M. Structural Health Monitoring and Damage Assessment Using Measured FRFs from Multiple Sensors, Part I: The Indicator of Correlation Criteria[J]. *Key Engineering Materials*, 2003, 245-246: 131-140.