

# 圆环巴西试验的抗拉强度建议公式

王杰, 陶俊林, 郭辉

(西南科技大学 土木工程与建筑学院, 四川 绵阳 621010)

**摘要:** **目的** 改进 Hobbs 公式得到的计算值普遍较大这一问题, 提出圆环巴西试验的抗拉强度建议公式。**方法** 对巴西试验圆环的应力解进行分析, 并引用砂岩的试验数据验证。**结果** 得到圆环巴西试验的抗拉强度建议公式, 使用 Hobbs 公式得到的抗拉强度  $\sigma_{TT}$  比巴西圆盘试验  $\sigma_T$  大 6 倍以上, 利用建议公式得到的抗拉强度  $\sigma_\theta$  与巴西圆盘试验  $\sigma_T$  十分接近, 误差不到 1%。**结论** 当圆环内外径比  $\rho$  在 0.05 到 0.15 的范围内时, 该建议公式可很好地用来计算岩石类等脆性材料的抗拉强度。

**关键词:** 圆环试件; 劈拉试验; 抗拉强度公式

**DOI:** 10.7643/issn.1672-9242.2019.02.009

**中图分类号:** TB122

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1672-9242(2019)02-0042-05

## Proposed Formula for Tensile Strength of Ring Brazil Test

WANG Jie, TAO Jun-lin, GUO Hui

(School of Civil Engineering and Architecture, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621010, China)

**ABSTRACT: Objective** To propose a formula for the tensile strength of the ring Brazil test and eliminate the problem that the calculated values obtained by the Hobbs formula are generally larger. **Methods** The stress solution of the Brazilian test ring was analyzed and the sandstone experiment data for verification was cited. **Results** The proposed formula of the tensile strength of the ring Brazil test was obtained; the tensile strength obtained through the Hobbs formula was six times more than that of the Brazilian disc test; and the tensile strength obtained through the proposed formula was very close to the Brazilian disc test with an error of less than 1%. **Conclusion** The proposed formula can be used to calculate the tensile strength of brittle materials when the inner and outer diameter ratio  $\rho$  of the ring specimen is in the range of 0.05 to 0.15.

**KEY WORDS:** ring specimen; splitting test; tensile strength formula

巴西圆盘试验广泛应用于间接测量岩石、混凝土等脆性材料的抗拉强度, 得到了相关规程的推荐<sup>[1-2]</sup>。巴西圆盘试验有时会出现现在加载点处起裂的情况<sup>[3]</sup>, 这属于受压破坏, 不易满足巴西圆盘试验的起裂条件。由此, Hobbs D W<sup>[4]</sup>提出在试件中心钻一个贯穿的圆孔, 形成圆环试件, 使试件从内孔开始起裂, 来保证试件受拉破坏, 并提出该方法的抗拉强度计算公式 (Hobbs 公式)。

随后, 学者们引用 Hobbs 公式对脆性材料的抗

拉强度做了大量的研究<sup>[5-11]</sup>。尤明庆等<sup>[5]</sup>对片麻岩、大理岩等材料做了圆环巴西试验, 认为当圆环试件内外径比小于 0.4 时, 用 Hobbs 公式得到的拉伸强度远大于巴西圆盘试验强度, 得出 Hobbs 公式不能作为岩石抗拉强度公式的结论<sup>[6-7]</sup>。文献[8-11]对圆环巴西试验做了数值模拟。朱万成等<sup>[8]</sup>认为, 如果能准确测出圆环试件的开裂载荷, 可将 Hobbs 公式中的载荷峰值替换为开裂载荷, 这时计算出的抗拉强度较为符合。要准确获得试验的开裂载荷, 现在

收稿日期: 2018-10-17; 修订日期: 2018-11-17

作者简介: 王杰 (1994—), 男, 重庆人, 硕士研究生, 主要研究方向为脆性材料劈拉力学性能。

通讯作者: 陶俊林 (1972—), 男, 四川人, 博士, 教授, 主要研究方向为材料和结构的力学行为。

的实验手段不易达到。

为此，文中对巴西试验圆环的应力解析解进行分析，提出圆环巴西试件的抗拉强度建议公式。在圆环内外径比  $\rho$  较小时，其计算值可表示岩石类脆性材料的抗拉强度。

## 1 抗拉强度公式介绍

### 1.1 巴西圆盘试验强度计算公式

在巴西圆盘试验中，加载线上的拉应力是常值  $2P/\pi Dt$ ；在圆盘的中心处，拉应力是压应力的  $1/3$ 。根据岩石、混凝土等脆性材料受压不受拉的特点，可得出巴西圆盘拉伸强度公式<sup>[1]</sup>：

$$\sigma_T = \frac{2P}{\pi Dt} \quad (1)$$

式中： $P$  为施加在圆盘试件上的载荷峰值； $D$  为圆盘直径； $t$  为圆盘试件厚度。

### 1.2 圆环巴西试验强度计算公式

Hobbs D W<sup>[4]</sup>提出圆环巴西试验抗拉强度计算公式：

$$\sigma_{TT} = \frac{P}{\pi b t} \left( 6 + 38 \frac{a^2}{b^2} \right) \quad (2)$$

式中： $P$  为施加在圆环试件上的载荷峰值； $t$  为圆环试件的厚度； $a$  和  $b$  分别为圆环试件的内半径和外半径。

式(2)是中心孔与  $\theta=0$  直线的交点  $A$  (如图 1 所示)的环向正应力近似表达,使用该公式的前提是：当内环边界上  $A$  点的环向正应力达到了材料的抗拉强度时，圆环试件的承载能力达到最大值。当  $A$  点出现裂纹后 ( $A$  点处的环向正应力达到了材料的抗拉强度)，这时的试件往往还能承载，承载力还会继续增大。因此， $A$  点出现裂纹，并不意味着试件的承载能力完全丧失。这是公式(2)用载荷峰值计算出的抗拉强度较高的可能原因。

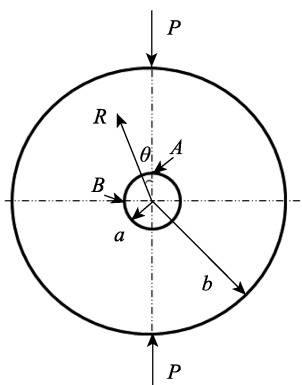


图 1 巴西试验圆环

## 2 圆环巴西试验建议公式的提出

Chianese R B 等<sup>[12]</sup>以弹性力学叠加原理和平面应力状态为基础，利用傅里叶级数推导出巴西试验圆环的应力表达式：

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{2P}{\pi b} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{r^2} \left( \frac{1-r^2}{1-\rho^2} \right) - \right. \\ & \frac{(1-r \cos \theta)(\cos \theta - r)^2}{(1+r^2-2r \cos \theta)^2} - \frac{(1+r \cos \theta)(\cos \theta + r)^2}{(1+r^2+2r \cos \theta)^2} - \\ & \left. \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ n(n-1) c_n r^{n-2} + (n+1)(n-2) d_n r^n + \right. \right. \\ & \left. \left. n(n+1) e_n r^{-n-2} + (n+2)(n-1) f_n r^{-n} \right\} \cos n\theta \right] \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} = & \frac{2P}{\pi b} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{r^2} \left( \frac{1+r^2}{1-\rho^2} \right) - \right. \\ & \frac{(1-r \cos \theta) \sin^2 \theta}{(1+r^2-2r \cos \theta)^2} - \frac{(1+r \cos \theta) \sin^2 \theta}{(1+r^2+2r \cos \theta)^2} + \\ & \left. \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ (n+1)(n+2) d_n r^n + n(n-1) c_n r^{n-2} + \right. \right. \\ & \left. \left. n(n+1) e_n r^{-n-2} + (n-2)(n-1) f_n r^{-n} \right\} \cos n\theta \right] \\ \tau_{r\theta} = & \frac{2P}{\pi b} \left[ \frac{(1-r \cos \theta)(\cos \theta + r) \sin \theta}{(1+r^2-2r \cos \theta)^2} + \right. \\ & \frac{(1+r \cos \theta)(\cos \theta - r) \sin \theta}{(1+r^2+2r \cos \theta)^2} + \\ & \left. \sum_{n=2}^{\infty} n \left\{ (n-1) c_n r^{n-2} + (n+1) d_n r^n - \right. \right. \\ & \left. \left. (n+1) e_n r^{-n-2} - (n-1) f_n r^{-n} \right\} \sin n\theta \right] \quad (4) \end{aligned}$$

其中：

$$D = n^2 \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 - \left( \rho^n - \frac{1}{\rho^n} \right)^2 \quad (6)$$

$c_n =$

$$\frac{1}{2(n-1)D} \left[ -n^2 \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 + n(\rho^2 - 1) + (\rho^{2n} - 1) \right] \quad (7)$$

$d_n =$

$$\frac{1}{2(n+1)D} \left[ -(\rho^{2n} - 1) + n^2 \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 + n \left( \frac{1}{\rho^2} - 1 \right) \right] \quad (8)$$

$$e_n = \frac{1}{2(n+1)D} \left[ n(\rho^2 - 1) + (\rho^{2n} - 1) \right] \quad (9)$$

$$f_n = \frac{1}{2(n-1)D} \left[ n \left( \frac{1}{\rho^2} - 1 \right) - (\rho^{2n} - 1) \right] \quad (10)$$

$$r = \frac{R}{b}, \quad \rho = \frac{a}{b} \quad (11)$$

式中:  $n$  为非零偶数。式中的相关参数如图 1 所示。

根据公式(4),可得出不同内外径比  $\rho$  下的内环边界环向正应力曲线,如图 2 所示。由于边界条件是轴对称的,只画出了弧  $\widehat{AB}$  部分(如图 1 所示)。

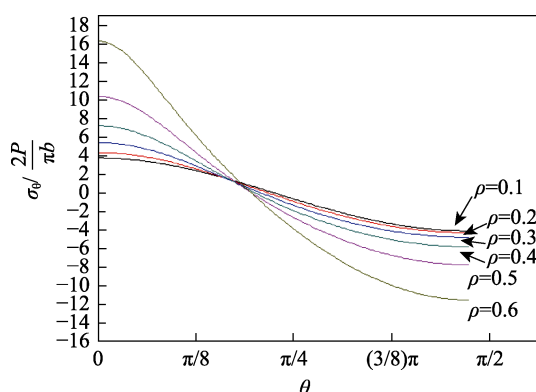


图 2 弧  $\widehat{AB}$  上各点的环向正应力

对同一条曲线,环向正应力由正值向负值转换,最大拉应力值在  $\theta=0$  处(图 1 的  $A$  点),而最大拉应力值与最大压应力值不相上下。这说明由岩石、混凝土等脆性材料制成的环形试件会从  $A$  点起裂,即受拉伸破坏。不同  $\rho$  下也有类似的规律( $\rho$  大于 0.6 也是如此),说明  $\rho$  值大小对圆环试件从  $A$  点起裂并无影响。

为了了解圆环在  $\theta=0$  直线上的拉压状态,利用式(4),画出  $\theta=0$  直线上的环向正应力变化曲线,如图 3 所示。

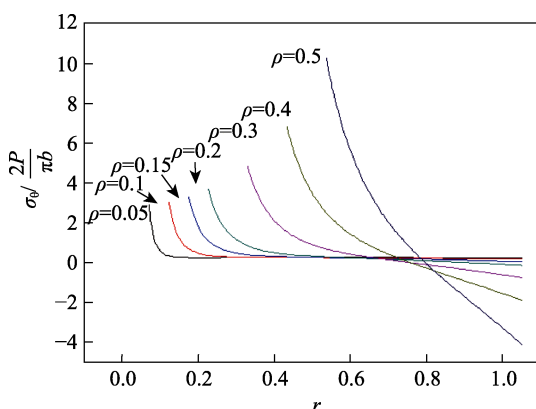


图 3  $\theta=0$  直线上的环向正应力

由图 3 可知,当  $\rho=0.5$  时,  $\theta=0$  直线上的环向正应力快速下降。随着  $r$  的减小,这种趋势发生了改变,“下降区”逐渐变短,在远离中心孔的部分逐渐形成一段平台;尤其在  $\rho \leq 0.15$  时,这种趋势越加明显。这

段长平台的形成,意味着  $\theta=0$  直线上绝大部分的环向正应力是几乎相等的。对于  $\rho \leq 0.15$  的脆性材料试件,  $A$  点会最先达到脆性材料的抗拉强度,发生拉伸破坏。当载荷继续增加时,裂纹才会延展,而当裂纹延伸到“长平台区”时,由于“长平台区”的环向正应力几乎相等,这时脆性材料同时发生破坏。若“长平台区”主导着脆性材料的拉伸破坏,则可在“长平台区”内取一点来表示脆性材料的拉伸强度。

下面对圆环试件的拉伸破坏由“下降区”主导,还是由“长平台区”主导进行讨论,以  $\rho=0.05$  曲线为例,如图 4 所示。

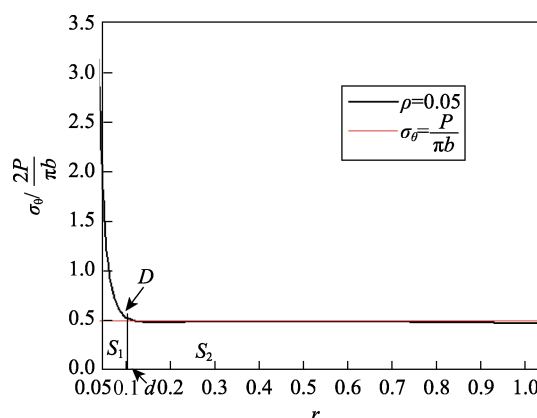


图 4  $\rho=0.05$  时在  $\theta=0$  直线上的环向正应力

将图 4 中的  $\rho=0.05$  曲线的“长平台区”线性拟合,得到拟合曲线的表达式:

$$\sigma_\theta = (-0.02r + 0.5) \frac{2P}{\pi b} \quad (12)$$

由于式(12)中,含  $r$  项的系数十分小,对式(12)的变化趋势基本无影响,为了化简表达式,将公式(12)简化为:

$$\sigma_\theta = \frac{P}{\pi b} \quad (13)$$

将式(13)画入图 4 中。在图 4 中,“ $\sigma_\theta = \frac{P}{\pi b}$ ”曲线与“ $\rho=0.05$ ”曲线的“长平台区”几乎完全重合,说明“ $\rho=0.05$ ”曲线的“长平台区”与横坐标几乎完全平行,这也印证了前文中提出的“长平台区”的合理性。

在图 4 中,随着  $r$  的增加,  $\rho=0.05$  曲线和“ $\sigma_\theta = \frac{P}{\pi b}$ ”曲线逐渐趋于重合;当  $\rho=0.05$  曲线和“ $\sigma_\theta = \frac{P}{\pi b}$ ”曲线的环向正应力差值为  $\frac{P}{\pi b}$  的 1/10 时,对应  $\rho=0.05$  曲线上为  $D$  点,其横坐标为  $d$ 。以  $D$  点为界,将  $\rho=0.05$  曲线分为两部分,即“下降区”和“长平台区”,对应曲线下的面积分别记为  $S_1$  和  $S_2$ 。利用 Maple 软件计算  $S_1$  和  $S_2$  的数值,可用  $S_1$  和  $S_2$  的大小来近似判断圆环试件的拉伸破坏由“下降区”主导,还是由“长平台区”

主导。

利用上述方法计算不同  $\rho$  时的  $S_1$ 、 $S_2$  值。为了便于比较，在表 1 中列出不同  $\rho$  时的  $S_1$ 、 $S_2$  值。

表 1 不同内外径比  $\rho$  时的  $S_1$ 、 $S_2$  值

| $\rho$ | 0.05 | 0.08 | 0.11 | 0.14 | 0.15 | 0.16 | 0.17 |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|
| $S_1$  | 0.06 | 0.10 | 0.15 | 0.21 | 0.23 | 0.25 | 0.27 |
| $S_2$  | 0.44 | 0.40 | 0.35 | 0.29 | 0.27 | 0.25 | 0.23 |

在表 1 中，内外径比  $\rho$  在 0.05~0.15 的范围内， $S_1 < S_2$ ，即“下降区”面积小于“长平台区”面积。这说明对于内外径比  $\rho$  在 0.05~0.15 的圆环巴西试验，其拉伸破坏由“长平台区”主导。又由于“长平台区”段曲线与横坐标基本平行，即该段的环向正应力十分接近，则可在图 3 中公有的“长平台区”内取一点来表示脆性材料的抗拉强度。如图 3 所示，可取  $r=0.5$  时的环向正应力来表示脆性材料的抗拉强度公式，将  $r=0.5$ 、 $\theta=0$  代入式 (4) 中，并考虑试件厚度  $t$ ，得到表达式：

$$\sigma_{\theta}(\theta=0, r=0.5, 0.05 \leq \rho \leq 0.15) = \frac{2P}{\pi b t} \left[ \frac{1-6\rho^2}{2-2\rho^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ n(n-1)c_n r^{n-2} + (n+1)(n+2)d_n r^n + n(n+1)e_n r^{-n-2} + (n-2)(n-1)f_n r^{-n} \right\} \right] \quad (14)$$

式 (14) 是脆性材料的建议抗拉强度计算公式，由于其存在多项式，使得表达式十分复杂，且随着  $n$  的增加而逐渐收敛。在图 5 中给出了不同  $n$  值时公式 (14) 的收敛情况。

在图 5 中，“ $n=10$ ”曲线和“ $n=20$ ”曲线完全重合，说明当  $n=10$  时，式 (14) 已经收敛了。此时的式 (14) 仍然十分复杂，不易运用。为了化简公式，将  $n=10$  时的式 (14) 进行三次多项式拟合，拟合情况如图 6 所示。

在图 6 中，三次多项式拟合曲线与“ $n=10$  时的式 (14)”曲线十分接近，其标准方差达到了 99.7%。

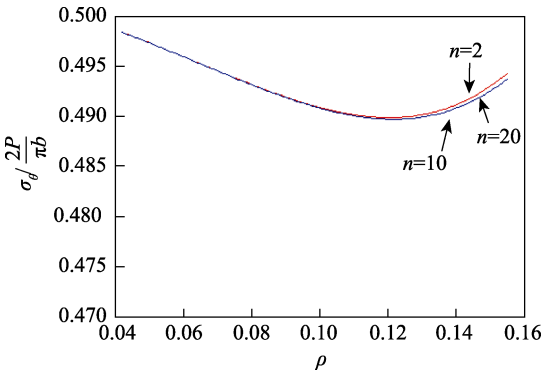


图 5 不同  $n$  值时式 (14) 的收敛情况

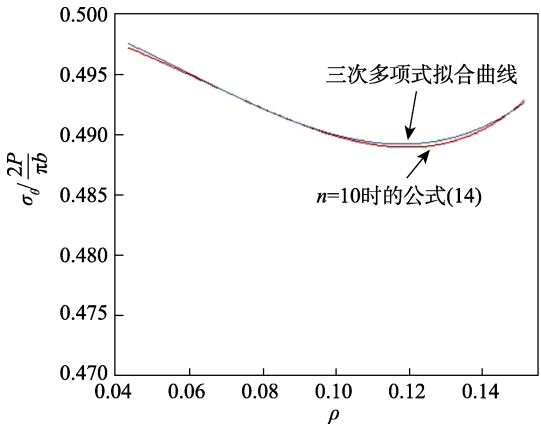


图 6  $n=10$  时式 (14) 的三次多项式拟合

为了化简强度公式，便于推广应用，式 (14) 可用三次多项式拟合曲线表达式替代，可简化为：

$$\sigma_{\theta} = \frac{2P}{\pi b t} (0.5 + 0.06\rho - 3.3\rho^2 + 17.07\rho^3) \quad (15)$$

3 圆环巴西试验建议公式的验证

选用文献[7]表格 2 中砂岩的劈拉试验数据对建议公式进行验证。砂岩试件为圆柱体，直径均为 50 mm，其高度和内孔直径见表 2。利用式 (1)、(2) 和 (15) 分别得到强度值  $\sigma_T$ 、 $\sigma_{TT}$  和  $\sigma_{\theta}$ 。

表 2 不同内外径比  $\rho$  时的  $\sigma_T$ 、 $\sigma_{TT}$  和  $\sigma_{\theta}$  值对比

| 序号  | 厚度 $t/\text{mm}$ | 外径 $D/\text{mm}$ | 内径 $d/\text{mm}$ | $\rho$ | $\sigma_T/\text{MPa}$ | $\sigma_T$ 平均值/MPa | $\sigma_{TT}/\text{MPa}$ | $\sigma_{\theta}/\text{MPa}$ | $\sigma_{\theta}$ 平均值/MPa |
|-----|------------------|------------------|------------------|--------|-----------------------|--------------------|--------------------------|------------------------------|---------------------------|
| A-1 | 34.2             | 50               | 0.0              | 0      | 4.55                  | 4.90               | 29.6                     | 4.60                         | 4.91                      |
| A-2 | 38.6             |                  | 0.0              |        | 4.78                  |                    |                          |                              |                           |
| A-3 | 32.8             |                  | 0.0              |        | 5.37                  |                    |                          |                              |                           |
| B-1 | 28.4             |                  | 4.6              | 0.092  |                       |                    | 31.5                     | 4.89                         | 4.91                      |
| B-2 | 35.2             |                  | 4.6              |        |                       |                    | 33.6                     | 5.22                         |                           |
| B-3 | 37.9             |                  | 4.6              |        |                       |                    | 22.5                     | 3.27                         |                           |
| C-1 | 36.7             |                  | 7.1              | 0.142  |                       |                    | 36.9                     | 5.35                         | 4.89                      |
| C-2 | 41.3             |                  | 7.1              |        |                       |                    | 41.6                     | 6.04                         |                           |
| C-3 | 33.8             |                  | 7.1              |        |                       |                    |                          |                              |                           |

注： $\rho=0$  时，试件是实心圆柱体，为巴西圆盘试验

巴西圆盘试验广泛应用于测量脆性材料的抗拉强度,因此,文中将 $\sigma_{TT}$ 、 $\sigma_\theta$ 与 $\sigma_T$ 作对比。在表2中, $\sigma_{TT}$ 值比 $\sigma_T$ 平均值大6倍以上,两者相差太大, $\sigma_{TT}$ 值不宜作为脆性材料的抗拉强度值;当 $\rho=0.092$ 时, $\sigma_\theta$ 平均值与 $\sigma_T$ 平均值十分接近,误差不到1%;当 $\rho=0.142$ 时, $\sigma_\theta$ 平均值与 $\sigma_T$ 平均值也十分接近,误差不到1%。由此说明,对于圆环巴西试验,使用建议公式(15)计算岩石类脆性材料的抗拉强度是可行的。

## 4 结语

圆环巴西试验能保证脆性材料试件受拉破坏。文中分析了巴西试验圆环的环向正应力,提出了岩石类脆性材料抗拉强度建议公式 $\sigma_\theta = \frac{2P}{\pi bt}(0.5 + 0.06\rho - 3.3\rho^2 + 17.07\rho^3)$ 。对于圆环内外径比 $\rho$ 在0.05~0.15范围内的圆环巴西试验,可用该建议公式计算岩石类脆性材料的抗拉强度。

### 参考文献:

- [1] MOHAMMAD D, FERAS F, HANI A, et al. Suggested Methods for Determining Tensile Strength of Rock Materials[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Science & Geomechanics Abstracts, 1978, 15(15): 99-103.
- [2] SL 264—2001, 水利水电工程岩石试验规程[S].
- [3] HUDSON J A, BROWN E T, RUMMEL F. The Controlled Failure of Rock Discs and Rings Loaded in Diametral Compression[J]. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1972, 9(2): 241-248.
- [4] HOBBS D W. An Assessment of a Technique for Determining the Tensile Strength of Rock[J]. British Journal of Applied Physics, 2002, 16(2): 259.
- [5] 尤明庆, 陈向雷, 苏承东. 干燥及饱水岩石圆盘和圆环的巴西劈裂强度[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, 30(3): 464-472.
- [6] DI-YUAN L I, WANG T, CHENG T J, et al. Static and Dynamic Tensile Failure Characteristics of Rock Based on Splitting Test of Circular Ring[J]. Transactions of Nonferrous Metals Society of China, 2016, 26(7): 1912-1918.
- [7] 尤明庆, 苏承东. 砂岩孔道试样压拉应力下强度和破坏的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(6): 1096-1105.
- [8] 朱万成, 冯丹, 周锦添, 等. 圆环试样用于岩石间接拉伸强度测试的数值试验[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2004, 25(9): 899-902.
- [9] 王来贵, 赵娜, 周永发. 岩石圆环试件拉张破裂结构演化有限元模拟[J]. 自然科学进展, 2009, 19(4): 467-472.
- [10] LIU K, LIU B, LIU W. Numerical Study on Size Effect of Ring Specimen under Brazilian Test[C]// International Young Scholars' Symposium on Rock Mechanics. [s. l.]: [s. n.], 2008.
- [11] 刘文彬, 唐春安, 张后全. 圆环试样内径对抗拉强度的影响[J]. 岩土工程技术, 2004, 18(6): 286-290.
- [12] CHIANESE R B, ERDLAC R J. The General Solution to the Distribution of Stresses in a Circular Ring Compressed by Two Forces Acting Along a Diameter[J]. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1988, 41(2): 239-247.