仅知失效数的指数型元件失效率的估计

陈玉阳 [1,2a]，吴和成 [2a]，胡明月 [2b]
（1.大连理工大学 石油与化学工程学院，辽宁 盘锦 124221；
2.南京航空航天大学，a.经济与管理学院，b.理学院，南京 211106）

摘要：目的 基于仅知失效元件数而不知其确切寿命的试验数据，对指数型元件的失效率进行估计。**方法** 设在时刻 t_0=0 以 n 个指数型元件进行寿命试验，但仅在时刻 $t_0< t_1<\ldots< t_k$ 记录失效的元件数，即在$[t_0, t_1],[t_1, t_2],\ldots,[t_{k-1}, t_k]$内可以观测到失效的元件数，但失效元件的确切寿命未知，将各时间段内的失效元件数分别记为 $r_1,r_2,\ldots,r_k$，在 t_k 时刻未失效的元件数记为 r_{k+1}。采用改进的条件中数的方法，计算元件在$[t_0, t_1],[t_1, t_2],\ldots,[t_{k-1}, t_k],[t_k, \infty]$的条件中位寿命分别为 $\mu_1, \mu_2,\ldots, \mu_k, \mu_{k+1}$，将$[t_{i-1}, t_i]$内失效的 r_i 个元件的寿命均近似看作 μ_i，未失效的 r_{k+1} 个元件的寿命近似看作$(t_k+\mu_{k+1})/2$，进而估计元件的失效率，并对此方法进行仿真。**结果** 仿真结果表明，改进后的估计结果得到改善。**结论** 对于此类数据，改进的条件中位数方法可以有效估计元件的失效率，并可应用于实际。

关键词：失效率；指数分布；条件中位数；可靠性
DOI：10.7643/ issn.1672-9242.2019.05.012
中图分类号：TB114 **文献标识码：**A
文章编号：1672-9242(2019)05-0059-06

Estimation on Failure Rate of Exponential Elements When Only the Failure Number is Known

CHEN Yu-yang[1,2a], *WU He-cheng*[2a], *HU Ming-yue*[2b]
(1. School of Petroleum and Chemical Engineering, Dalian University of Technology, Panjin, 124221, China;
2. a. College of Economics and Management, b. College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 211106, China)

ABSTRACT: Objective To estimate the failure rate of exponential components based on the test data that only the number of failure elements is known and the exact life is unknown. **Methods** A life test on n components was conducted at the time t_0=0 and the number of failure components was only recorded at the time $t_0< t_1<\cdots< t_k$, that is to say, failure components can be observed in $[t_0, t_1],[t_1, t_2],\cdots,[t_{k-1}, t_k]$. But the exact lifetime of the failure components was unknown. The number of failure components in each time period was denoted as $r_1,r_2,\cdots,r_k$ and the number of valid components at the time t_k was denoted as r_{k+1}. An improved conditional median method for estimating the failure rate for such data was adopted. The conditional median life in $[t_0, t_1],[t_1, t_2],\ldots,[t_{k-1}, t_k],[t_k, \infty]$ was calculated as $\mu_1, \mu_2,\ldots, \mu_k, \mu_{k+1}$ respectively. The lifetime of the r_i elements in $[t_{i-1}, t_i]$ was approximately considered as μ_i. The lifetimes of the r_{k+1}components that were not invalidated were approximately considered as $(t_k+\mu_{k+1})/2$. Then the failure rate of components was estimated and the method was simulated. **Results** It is shown that the improved evaluation method was more accurate. **Conclusion** For this kind of data, the improved conditional median method can effectively estimate the failure rate of components and can be applied to practice.

收稿日期：2019-01-03；**修订日期：**2019-01-28
作者简介：陈玉阳（1993—），女，硕士，主要研究方向为可靠性评估。
通讯作者：吴和成（1963—），男，博士，教授，主要研究方向为可靠性评估。

KEY WORDS: failure rate; exponential distribution; conditional median; reliability

指数型产品的失效率评估问题，在可靠性理论和应用中比较常见，而且一直受到关注，但不同试验类型的数据对于元件失效率或元件的可靠性评估带来的困难各异。对于定数截尾或定时截尾试验数据，可以得到指数型元件失效率的显式估计[1]。对于贮存设备，因其不处于运行中，往往得不到其准确的失效时间，只能通过定期检测来确定设备是否失效，而失效设备的确切寿命是未知的。

对于不确定数据的可靠性估计研究，Dempster 等[2]于 1977 年提出，在不完全数据情况下，利用 EM 算法来解决可靠性估计的问题。木拉提等[3]对删失数据的对数正态分布参数估计和混合正态分布参数的最大似然估计进行了模拟，模拟结果表明，EM 算法是有效的，估值精度满足要求。Tan[4]将 EM 算法应用于串并联系统中，有效地解决了基于不确定数据的系统可靠性估计问题。1976 年 Turnbull[5]提出了求删失数据的广义最大似然估计的 SC（self-consistant）算法，随后 GU 等[6]建立了 SC 算法估计的一致性和正态性，近年来 SC 算法仍然广泛应用于可靠性评估中。徐永红等[7]提出基于均值插补法和最近邻插补法的非参数估计方法，相比于经典 SC 算法，该算法具有更高的精确度和更好的稳健性。平均秩次法[8]是一种在随机截尾条件下经验分布函数的计算方法。沈安慰[9]在可靠性数据分析中引入累积法，结合平均秩次法解决随机删失数据下的参数估计问题。Olgierd[10]认为，在实际应用中，获取的数据往往是不确定的，并提出用模糊 Bayes 方法对可靠性评估进行研究。Peng 等[11]基于包含区间删失数据的可修系统，提出蒙特卡洛期望最大化算法（MCEM），可以有效地对系统的可靠性进行评估和预测，并通过仿真和实例证明了方法的有效性。A. Regattieri 等[12]通过轻型商用车制造系统案例研究，说明了故障过程建模（FPM）方法对于不确定数据的可靠性估计是有效的。David 等[13]基于模糊概率理论，对仅含有删失数据的元件可靠性进行了估计。B. García-Mora 等[14]认为，在可靠性试验中，不能准确地观测到产品的失效时间，他们利用广义非线性模型对产品的失效率进行估计，并可以预测未来某一时刻产品的可靠度。Zhao 等[15]应用三角模糊数的方法对航空发动机的可靠性进行了预测。Ogryczak W[16]针对选址问题，综合考虑空间的利用率，应用条件中位数方法求解了 k-centrum 模型中的参数。范大茵[17]应用条件中位数的方法来估计元件的失效率，并讨论了可靠性置信下限的问题。胡斌等[18]认为，条件中位数方法对尚未发生的事件进行了外推，并在其基础上加以改进。

对于不确定数据的可靠性估计，国内外文献通常基于 EM 方法，用条件期望代替寿命的估计，但是 EM 方法必须通过牛顿迭代法计算，不仅计算繁琐，还必须考虑迭代是否收敛的问题。最大似然估计法计算简便，估计量具有一致性和有效性，但有时难以得到估计量的解析式。模糊理论方法可以综合考虑不确定信息，但是信息简单的模糊处理将导致估值精度降低。条件中位数方法计算简便，且必存在收敛于方程的根。文中基于文献[17]和[18]提出的基于条件中位数的改进方法，针对仅知失效元件数的试验数据，对指数型元件的失效率进行估计。

1 试验数据

设元件的寿命 x 服从参数为 λ 的指数分布，其分布密度为：

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{1}$$

式中：λ 未知，且 $\lambda\in R^{+}$。在 $t_0=0$ 时刻以 n 个元件进行寿命试验，记 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k$，在时刻 t_i 观测时间区间 $\left[t_{i-1},t_i\right)$ 内失效的元件数，结果见表 1。此类数据的特点是：仅知在某时间段内失效的元件数，而不知失效元件的确切寿命。

表 1 试验数据

时间区间	$[t_0, t_1)$	$\cdots$	$[t_{k-1}, t_k)$	$[t_k, \infty)$
失效数	r_1	$\cdots$	r_k	r_{k+1}

2 元件失效率的估计

如要估计元件在 t 时刻的可靠度 $R(t)=e^{-\lambda t}$，则先要估计元件分布中的参数 λ。在完全样本情形，即有全部被试验元件的寿命数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则 λ 的最大似然估计值为：

$$\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\overline{x}} \tag{2}$$

这里 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 为样本均值的观测值。

对于表 1 数据，容易得到参数的似然函数：

$$L\left(r_1,r_2,\cdots,r_k,r_{k+1},\lambda\right)=\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!r_{k+1}!}\prod_{i=1}^{k+1}\left(F(t_i)-F(t_{i-1})\right)^{r_i} \tag{3}$$

这里 $F(t_i)=\int_{-\infty}^{t_i} f(x)\mathrm{d}x = 1-\mathrm{e}^{-\lambda t_i}$ 。即有：

$$L(r_1, r_2, \cdots, r_k, r_{k+1}, \lambda) = \frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!r_{k+1}!}\prod_{i=1}^{k+1}(\mathrm{e}^{-\lambda t_{i-1}}-\mathrm{e}^{-\lambda t_i})^{r_i} \tag{4}$$

若对观测区间没有限制，则由式（4）难以得到参数 λ 最大似然估计的显式表达式。如对于观测区间为等间距情形，可以获得 λ 最大似然估计的显式表达式。不妨记 $t_i - t_{i-1} \triangleq a$ ，对一切 $i = 1, 2, \cdots, k$ 。再记 $\ln(\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!r_{k+1}!}) \triangleq b$ ，则：

$$\begin{aligned}&\ln\left(L(r_1, r_2, \cdots, r_k, r_{k+1}, \lambda)\right) = \\ &b+\sum_{i=1}^{k+1} r_i \ln\{\mathrm{e}^{-\lambda t_{i-1}}(1-\mathrm{e}^{-\lambda(t_i-t_{i-1})})\} = \\ &b-\lambda\sum_{i=1}^{k+1} r_i t_{i-1}+\sum_{i=1}^{k+1} r_i \ln(1-\mathrm{e}^{-\lambda(t_i-t_{i-1})}) = \\ &b-\lambda\sum_{i-1}^{k+1} r_i t_{i-1}+n\ln(1-\mathrm{e}^{-a\lambda})\end{aligned} \tag{5}$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(r_1, r_2, \cdots, r_k, r_{k+1}, \lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=0$ ，则有：

$$-\sum_{i=1}^{k+1} r_i t_{i-1}+(na+\sum_{i=1}^{k+1} r_i t_{i-1})\mathrm{e}^{-a\lambda}=0 \tag{6}$$

从而：

$$\hat{\lambda}=-\frac{1}{a}\ln\frac{\sum_{i=1}^{k+1} r_i t_{i-1}}{an+\sum_{i=1}^{k+1} r_i t_{i-1}} \tag{7}$$

对于观测时间间隔不等情形，无法得到元件失效率最大似然估计的解析式。因此，对于一般情形下，一个自然的想法是否可以用区间 $[t_{i-1}, t_i)$ 中的一个数作为元件寿命的估计值。由此，再利用式（2）得到元件失效率 λ 的一个估计值。由于元件寿命服从指数分布，因此，如用区间中点作为元件寿命的估计值不合理。一个有统计意义的数值，即利用条件中位数作为元件寿命的估计值具有直观合理性。

3　失效率估计的改进方法

以满足下列方程的 μ_i 作为寿命在 $[t_{i-1}, t_i)$ 中的元件寿命的估计[17]：

$$P\{X \geqslant \mu_i \mid t_{i-1} \leqslant X < t_i\}=\frac{1}{2} \tag{8}$$

即有：

$$\frac{\int_{\mu_i}^{t_i} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t}{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t}=\frac{1}{2} \tag{9}$$

从而有：

$$\mu_i=\frac{\ln 2-\ln(\mathrm{e}^{-\lambda t_{i-1}}+\mathrm{e}^{-\lambda t_i})}{\lambda}, i=1, \cdots, k+1 \tag{10}$$

将 $[t_{i-1}, t_i)$ 内失效的 r_i 个失效的元件的寿命均近似看作 μ_i，则由式（2）可以得到 λ 的近似估计值为下列方程的根：

$$\lambda=\frac{n}{\sum_{i=1}^{k+1} r_i[\frac{\ln 2-\ln(\mathrm{e}^{-\lambda t_{i-1}}+\mathrm{e}^{-\lambda t_i})}{\lambda}]} \tag{11}$$

整理得：

$$\sum_{i=1}^{k+1} r_i \ln(\mathrm{e}^{-\lambda t_{i-1}}+\mathrm{e}^{-\lambda t_i})=n(\ln 2-1) \tag{12}$$

如记：

$$g(\lambda)=\sum_{i=1}^{k+1} r_i \ln(\mathrm{e}^{-\lambda t_{i-1}}+\mathrm{e}^{-\lambda t_i})-n(\ln 2-1) \tag{13}$$

则：$g'(\lambda)=\sum_{i=1}^{k+1} r_i \frac{-t_{i-1}\mathrm{e}^{-\lambda t_{i-1}}-t_i\mathrm{e}^{-\lambda t_i}}{\mathrm{e}^{-\lambda t_{i-1}}+\mathrm{e}^{-\lambda t_i}}<0$

即 $g(\lambda)$是 λ 的严格单调递减函数。另外，容易验证 $g(0)>0, g(+\infty)<0$ ，故 $g(\lambda)=0$ 有唯一正解。

文献[18]对此方法加以改进，认为条件中位数方法对尚未发生的事件进行了外推，其给出的估计为：

$$\hat{\lambda}=\frac{\sum_{i=1}^{k} r_i}{\sum_{i=1}^{k} r_i\mu_i+r_{k+1}t_k} \tag{14}$$

将 μ_i 代入，并整理，得：

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \ln[\exp(-\lambda t_{i-1})+\exp(-\lambda t_i)]-r_{k+!}\lambda t_k = (n-r_{k+1})(\ln 2-1) \tag{15}$$

相比于文献[17]，文献[18]效果更好，但缺乏统计含义。为兼顾效果和含义，提出一种基于条件中位数的改进方法，即用 $\frac{t_k+\mu_{k+1}}{2}$ 代替 μ_{k+1} 作为未失效元件的寿命估计。

$$\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{k} r_i\mu_i+r_{k+1}\frac{t_k+\mu_{k+1}}{2}} \tag{16}$$

将 μ_i 代入，并整理，得：

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \ln[\exp(-\lambda t_{i-1}) + \exp(-\lambda t_i)] +$$

$$\frac{r_{k+1}}{2}\ln[\exp(-\lambda t_k) + \exp(-\lambda t_{k+1})] - \tag{17}$$

$$\frac{r_{k+1}}{2}\lambda t_k = N(\ln 2 - 1) + \frac{r_{k+1}}{2}\ln 2$$

从上述方程求出 λ，即得元件失效率的估计值。显然，式（17）的求解需要数值解法。

4　估计的优良性

为比较三种方法的估计效果，采用文献[18]的方法进行仿真。

4.1　仿真原理

假设 n 个元件在 t_0=0 时刻开始贮存，在规定时刻 $t_i(i=1,2,...,k)$ 进行定检，并且其贮存失效率 λ 已知。按指数分布随机生成失效时刻 $\xi_j(j=1,2,...n)$，若 $t_{i-1} < \xi_j \leqslant t_i$，认为元件在定检区间 $(t_{i-1}, t_i]$ 内发生一次失效，由此得到产品在定检区间内的失效数 $r_i(i=1,2,...k)$ 和 r_{k+1}。把 n，$t_i(i=1,2,...,k)$，$r_i(i=1,2,...k)$ 和 r_{k+1} 分别代入式（12）、（15）、（17），迭代求解出 λ 的对应估计值 $\hat{\lambda}_1$、$\hat{\lambda}_2$、$\hat{\lambda}_3$。重复该过程 m 次，得到 m 个 $\hat{\lambda}_1$、$\hat{\lambda}_2$、$\hat{\lambda}_3$，分析诸 $\hat{\lambda}_i(i=1,2)$ 的统计特性并与真值 λ 比较，对文献[17]、文献[18]和文中方法的估计效果进行分析。

4.2　仿真步骤

1）给常量 λ，n，m 和 $t_i(i=1,2,...,k)$ 赋值，令失效数 $r_i(i=1,2,...,k)$ 和 r_{k+1} 的初值为 0。

2）生成失效时刻 $\xi_j(j=1,2,...n)$：利用随机数生成命令产生 $(0,1)$ 指数分布的伪随机数 η_j，按式（18）计算 ξ_j：

$$\xi_j = -\frac{1}{\lambda}\ln \eta_j \tag{18}$$

ξ_j 就是贮存失效率为 λ 时元件的随机失效时刻。

3）求定检区间失效数 $r_i(i=1,2,...k)$ 和 r_{k+1}：将 ξ_j 与定检时刻 t_i 进行比较，ξ_j 必落入某一个定检区间。若 $t_{i-1} < \xi_j \leqslant t_i$，则 $r_i = r_i + 1$；若 $\xi_j > t_k$，则 $r_{k+1} = r_{k+1} + 1$。取 $j = 1,2,...n$，重复 n 次后，得到求解模型方程所需的 $r_i(i=1,2,...k)$ 和 r_{k+1}。

4）求解仿真方程：将 n，$t_i(i=1,2,...,k)$，$r_i(i=1,2,...k)$ 和 r_{k+1} 代入式（12）、（15）、（17），分别得到三种方法的仿真过程。迭代求解非线性方程，求出真值 λ 的对应估计值 $\hat{\lambda}_1$、$\hat{\lambda}_2$、$\hat{\lambda}_3$。

5）重复步骤 2）—4）共 m 次，得到 λ 的对应估计值 $\hat{\lambda}_{1i}$、$\hat{\lambda}_{2i}$、$\hat{\lambda}_{3i}$ $(i=1,2,...,m)$。

6）计算三种方法的估计均值、估计标准差和相对估计误差。

4.3　仿真结果

数字仿真用 Matlab 语言实现。取 m=1000。取 $t_1=0.5$，$t_2=1.5$，$t_3=2$，$t_4=3$，$t_5=4.5$，$t_6=5$，$t_7=6.5$，$t_8=7.5$，$t_9=9$，$t_{10}=11$（单位：a），真值 λ 分别等于 0.1，0.25，0.4，0.5，0.8，1，1.2（单位：1/a）。分别对 n=50，n=100，n=200 进行仿真，仿真的结果见表 2。

由表 2 可以看出：当真值 λ 取 0.1，0.25，0.8，1，1.2 时，应用文献[17]的方法得到的估计值的相对误差较大。当 λ=0.1，n=50 时，相对误差达到 64.16%，而文献[18]和文中方法得到的估计值的相对误差较小。当真值 λ 取 0.4 和 0.5 时，三种方法得到的估计值的相对误差都较小。当 λ=0.5，n=50 时，三种方法

表 2　仿真结果

n=50，m=1000									
真值 λ	文献[17]方法			文献[18]方法			文中方法		
	估计值的均值 $\overline{\hat{\lambda}_1}$	标准差 σ_1	相对误差 ε_1 / %	估计值的均值 $\overline{\hat{\lambda}_2}$	标准差 σ_2	相对误差 ε_2 / %	估计值的均值 $\overline{\hat{\lambda}_3}$	标准差 σ_3	相对误差 ε_3 / %
0.1	0.1642	0.0133	64.16	0.1025	0.0185	2.46	0.0989	0.0188	1.14
0.25	0.2742	0.0374	9.66	0.2548	0.0368	1.93	0.2523	0.0360	0.91
0.4	0.4077	0.0536	1.93	0.3941	0.0545	1.48	0.3955	0.0558	1.13
0.5	0.4830	0.0657	3.39	0.4831	0.0672	3.37	0.4856	0.0668	2.87
0.8	0.7265 0.7265	0.1081	9.19	0.7398	0.0970	7.52	0.7620	0.0834	4.74
1	0.8801	0.1035	11.99	0.8857	0.1352	11.43	0.9556	0.0816	4.44
1.2	1.0333	0.0598	13.89	1.0254	0.0563	14.55	1.2507	0.0889	4.22

续表 2

n=100，m=1000									
	文献[17]方法			文献[18]方法			文中方法		
真值 λ	估计值的均值 $\overline{\hat{\lambda}_1}$	标准差 σ_1	相对误差 ε_1 / %	估计值的均值 $\overline{\hat{\lambda}_2}$	标准差 σ_2	相对误差 ε_2 / %	估计值的均值 $\overline{\hat{\lambda}_3}$	标准差 σ_3	相对误差 ε_3 / %
0.1	0.1642	0.0092	64.22	0.1023	0.0177	2.35	0.0990	0.0128	0.98
0.25	0.2773	0.0320	10.92	0.2538	0.0368	1.53	0.2513	0.0367	0.54
0.4	0.4015	0.0517	1.26	0.3951	0.0540	1.22	0.3973	0.0549	0.89
0.5	0.4838	0.0629	3.24	0.4853	0.0653	2.95	0.4870	0.0640	2.60
0.8	0.7210	0.0946	9.88	0.7316	0.0870	8.55	0.7645	0.1045	4.43
1	0.8603	0.0969	13.97	0.8761	0.1166	12.39	0.9435	0.0771	5.65
1.2	1.0627	0.0421	11.44	1.0444	0.0344	12.96	1.1278	0.0835	6.02
n=200，m=1000									
	文献[17]方法			文献[18]方法			文中方法		
真值 λ	估计值的均值 $\overline{\hat{\lambda}_1}$	标准差 σ_1	相对误差 ε_1 / %	估计值的均值 $\overline{\hat{\lambda}_2}$	标准差 σ_2	相对误差 ε_2 / %	估计值的均值 $\overline{\hat{\lambda}_3}$	标准差 σ_3	相对误差 ε_3 / %
0.1	0.1640	0.0064	63.99	0.1015	0.0172	1.50	0.0990	0.0086	0.97
0.25	0.2765	0.0313	10.61	0.2534	0.0366	1.35	0.2508	0.0371	0.32
0.4	0.3954	0.0492	1.15	0.3956	0.0546	1.09	0.3973	0.0549	0.67
0.5	0.4811	0.0621	3.78	0.4815	0.0696	3.69	0.4866	0.0658	2.67
0.8	0.7272	0.0848	9.10	0.7323	0.0790	8.47	0.7766	0.1091	2.92
1	0.8789	0.0959	12.11	0.8898	0.1262	11.02	0.9611	0.0640	3.89
1.2	1.0275	0.0358	14.38	1.0033	0.0238	16.39	1.2658	0.0766	5.48

表 3 某指数型元件试验数据

检测时刻	0.5	1.0	1.5	2.5	4.0	5.0
失效数	1	3	4	6	2	1

得到的估计值的相对误差分别为 3.39%，3.37%和 2.87%，文中方法得到的估计值更贴近真值。当真值 λ=0.4，n 分别为 50、100、200 时，文中方法得到的估计值的相对误差分别为 1.13%，0.89%和 0.67%。即随着样本量的增加，应用文中方法得到的估计值的相对误差越来越小。

因此，文中提出的方法相比于文献[17]和文献[18]的方法，估计值的均值更接近真值，相对误差较小，估计结果得到改善。

4.4 实例分析

某指数型元件试验数据见表 3，其中 n=20，k=6，代入式（17），应用 Matlab 计算得到 λ=0.3687。则元件的可靠度为 $R(t)=e^{-0.3678t}$

5 结语

针对文中试验数据的特点，提出了一种失效率的估计方法。对于仅知在某时间段内失效的元件数，而不知失效元件的确切寿命这类数据，提出估计失效率的改进的条件中位数方法，进而可以估计元件的可靠度。仿真结果表明，文中提出的方法估计结果得到改善，可以应用于实际中。

参考文献：

[1] 梅启智，廖炯生，孙惠中．系统可靠性工程基础[M]. 北京：科学出版社, 1992.

[2] DEMPSTER A P,LAIRD N M,RUDIN D B. Maximum Likelihood From Incomplete Data Via the EM Algorithm [J]. J Roy Statist Soc, 1977(39): 1-38.

[3] 木拉提，吐尔德，胡锡健．EM 算法在删失数据分布和混合分布参数估计中的应用[J]. 统计与决策, 2011(15): 161-163.

[4] TAN Z B. Estimation of Exponential Component Reliability from Uncertain Life Data in Series and Parallel Systems[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2007, 92: 223-230.

[5] TURNBULL B W. The Empirical Distribution Function with Arbitrary Grouped, Censored and Truncated Data[J]. J Roy Statist Soc Ser B-STAT MET, 1976, 38(3): 290-295.

[6] GU G M, ZHANG C H. Asymptotic Properties of Self-consistent Estimators Based on Doubly Censored Data[J]. Ann Stat, 2001, 21(2): 611-624.

[7] 徐永红，高晓欢，王正熙．含有右删失和区间删失数据的生存函数的非参数估计[J]. 生物医学工程学杂志, 2014, 31(2): 267-272.

[8] 赵宇. 可靠性数据分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2011.

[9] 沈安慰, 贾林通, 郭基联. 累积法在随机删失数据可靠性评估中的应用[J]. 火力与指挥控制, 2014(3): 36-39.

[10] OLGIERD H. Bayes Statistical Decisions with Random Fuzzy Data—An Application in Reliability[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2016,151: 20-33.

[11] PENG Y Z, WANG Y, ZI Y Y. Dynamic Reliability Assessment and Prediction for Repairable Systems with Interval-censored Data[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2017,159: 301-309.

[12] REGATTIERI A, MANZINI R, BATTINI D. Estimating Reliability Characteristics in the Presence of Censored Data: A Case Study in a Light Commercial Vehicle Manufacturing System[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2010, 95: 1093-1102.

[13] GONZALEZ-GONZALEZ D, CANTU-SIFUENTES M, PRAGA-ALEJO R. Fuzzy Reliability Analysis with Only Censored Data[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2014(32): 151-159.

[14] GARCÍA-MORA B, DEBÓN A, SANTAMARÍA C, et al. Modelling the Failure Risk for Water Supply Networks with Interval-censored Data[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2015,144: 311-318.

[15] ZHAO D Z, CAI N. Aeroengine Reliability Prediction Based on Fuzzy and Interval Number[J]. Procedia Engineering, 2015, 99: 1284-1288.

[16] OGRYCZAK W, ZAWADZKI M. Conditional Median: A Parametric Solution Concept for Location Problems[J]. Annals of Operations Research, 2002, 110(1): 167-181.

[17] 范大茵. 利用条件中位数求指数寿命型元件可靠性近似置信下限[J]. 宇航学报, 1992(1): 81-83.

[18] 胡斌, 林震, 朱亮. 求解贮存失效率的条件中位数算法改进[J]. 可靠性与环境适应性理论研究, 2004(2): 2-3.