

重大工程装备

Mie 散射中递推方法的比较

林乐科, 赵振维, 张鑫

(中国电波传播研究所, 山东 青岛 266107)

摘要: 比较了 Mie 理论计算中的 3 个递推公式, 既正向递推公式、倒递推公式和赵递推公式, 分析了 3 个公式计算归一化消光截面、散射截面和后向散射截面的收敛性能, 发现正向递推公式的 3 种散射截面当 x 较大时都会出现发散现象, 而倒递推公式和赵递推公式都收敛, 另外也分析了截断项数的容错性, 分析表明赵递推公式对截断项数有最好的鲁棒性。通过上述分析, 表明赵递推公式有着最广泛的适用范围与最准确的精度。

关键词: 电磁散射; Mie 理论; 递推公式

中图分类号: TB112

文献标识码: A

文章编号: 1672-9242(2021)07-0075-04

DOI: 10.7643/issn.1672-9242.2021.07.011

Comparison of the Recursion Formula in Calculation of Mie Scattering

LIN Le-ke, ZHAO Zhen-wei, ZHANG Xin

(China Research Institute of Radiowave Propagation, Qingdao 266107, China)

ABSTRACT: A comparison of three recursion formulae in the calculation of Mie scattering is made herein, namely the forward recursive formula, the backward recursive formula and Zhao recursive formula. The convergence performance of the three formulae for calculating the normalized extinction cross section, normalized scattering cross section and normalized backscatter cross section is analyzed. It is found that the three scattering cross sections of the forward recursion formula diverge when x is larger, and the results of the backward reverse recursion formula and Zhao recursion formula both converge. In addition, the fault tolerance of the truncated items is also analyzed. The analysis shows that Zhao recursive formula has the best robustness to the truncated items. Through the above analysis, it is shown that Zhao recursive formula has the widest applicable range and the most accurate precision.

KEY WORDS: electromagnetic scattering; Mie theory; recursion formula

Mie 理论对于无损介质中均匀球的散射问题给出了一个精确的解答^[1-2]。它广泛应用于气体分子、

收稿日期: 2021-01-28; 修订日期: 2021-03-10

Received: 2021-01-28; Revised: 2021-03-10

基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (61971385)

Fund: General Projects of NSFC (61971385)

作者简介: 林乐科 (1972—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为对流层电波传播与电磁散射。

Biography: LIN Le-ke (1972—), Male, Ph. D, Professor, Research focus: tropospheric radio wave propagation and electromagnetic scattering.

通讯作者: 赵振维 (1965—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为电波传播和电波环境特性等。

Corresponding author: ZHAO Zhen-wei (1965—), Male, Ph. D, Professor, Research focus: characteristics of radio wave propagation and radio wave environment.

引文格式: 林乐科, 赵振维, 张鑫. Mie 散射中递推方法的比较[J]. 装备环境工程, 2021, 18(7): 075-078.

LIN Le-ke, ZHAO Zhen-wei, ZHANG Xin. Comparison of the recursion formula in calculation of Mie scattering[J]. Equipment environmental engineering, 2021, 18(7): 075-078.

气溶胶、云雾水滴、小雨滴等近球形粒子的 X 射线、可见光、红外、微波、毫米波的电磁散射、辐射气象、医学、遥感、通信、雷达等多个领域^[3-15]。Mie 理论的准确计算有着重要的现实意义,例如球形水滴的散射是云雾和降雨衰减计算的基础等,但其系数中包含复杂的函数形式(球贝塞尔函数及其导数),计算复杂,难以精确求解。为此提出了几种递推的方法^[16-18],便于计算。文献[18]对于赵递推和正向递推方法的收敛性进行了比较,但是没有比较倒递推方法,也没有比较不同递推方法对于截断项数的收敛特性。为此,文中比较了这几种递推方法的收敛性能、截断项数的鲁棒性等,发现如正确选择参数,赵递推公式最准确、适用范围最广。

1 Mie 理论数值计算

假定介质球的折射指数为 m , 半径为 r , 其周围介质为自由空间, 自由空间波长为 λ_0 , 则 Mie 理论系数的计算公式为^[16-17,19]:

$$a_n = \frac{m\psi_n(mx)\psi_n'(x) - \psi_n(x)\psi_n'(mx)}{m\psi_n(mx)\xi_n'(x) - \xi_n(x)\psi_n'(mx)} \quad (1)$$

$$b_n = \frac{\psi_n(mx)\psi_n'(x) - m\psi_n(x)\psi_n'(mx)}{\psi_n(mx)\xi_n'(x) - m\xi_n(x)\psi_n'(mx)} \quad (2)$$

$$x = 2\pi r / \lambda_0 \quad (3)$$

$$m = m_r - im_i = \sqrt{\varepsilon_r - i\varepsilon_i} \quad (4)$$

其中:

$$\psi_n(\rho) = \rho j_n(\rho), \xi_n(\rho) = \rho h_n^{(1)}(\rho) \quad (5)$$

式中: $\psi_n(\rho)$ 、 $\xi_n(\rho)$ 为黎卡提-贝塞尔 (Riccati-Bessel) 函数, $j_n(\rho)$ 与 $h_n^{(1)}(\rho)$ 分别为球贝塞尔函数与第一类球汉克尔函数。黎卡提-贝塞尔函数具有以下性质及递推关系:

$$\psi_n'(\rho) = \psi_{n-1}(\rho) - \frac{m\psi_n(\rho)}{\rho} \quad (6)$$

$$\xi_n'(\rho) = \xi_{n-1}(\rho) - \frac{n\xi_n(\rho)}{\rho} \quad (7)$$

$$\psi_{n+1}(\rho) = \frac{2n+1}{\rho}\psi_n(\rho) - \psi_{n-1}(\rho) \quad (8)$$

$$\xi_{n+1}(\rho) = \frac{2n+1}{\rho}\xi_n(\rho) - \xi_{n-1}(\rho) \quad (9)$$

$$\xi_n(\rho) = \psi_n(\rho) + i\chi_n(\rho) \quad (10)$$

$$\psi_{-1}(\rho) = \cos(\rho) \quad \psi_0(\rho) = \sin(\rho) \quad (11)$$

$$\chi_{-1}(\rho) = -\sin(\rho) \quad \chi_0(\rho) = \cos(\rho) \quad (12)$$

令:

$$D_n(\rho) = \frac{\psi_n'(\rho)}{\psi_n(\rho)} \quad (13)$$

由(6)、(8)、(13)可推得:

$$D_{n-1}(\rho) = \frac{n}{\rho} - \frac{1}{D_n + n/\rho} \quad (14)$$

则有:

$$a_n = \frac{[D_n(mx)/m + n/x]\psi_n(x) - \psi_{n-1}(x)}{[D_n(mx)/m + n/x]\xi_n(x) - \xi_{n-1}(x)} \quad (15)$$

$$b_n = \frac{[mD_n(mx) + n/x]\psi_n(x) - \psi_{n-1}(x)}{[mD_n(mx) + n/x]\xi_n(x) - \xi_{n-1}(x)} \quad (16)$$

利用 Mie 系数计算归一化散射截面、消光截面、后向散射截面的公式为:

$$\sigma_s(m, x) = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (17)$$

$$\sigma_e(m, x) = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\text{Re}(a_n + b_n) \quad (18)$$

$$\sigma_b(m, x) = \frac{2}{x^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)(a_n - b_n) \right|^2 \quad (19)$$

2 计算 D_n 的递推公式

从以上公式可以看出,影响 Mie 系数精度的关键是 D_n 的计算,其他参数都给了恰当的初值与递推公式。当球为理想导体球时, $D_n=i$ 。对于介质球,目前计算 D_n 的主要递推方法有以下几种。

1) 倒递推公式,即直接利用式(14),计算散射、消光截面时取其前 K 项, K 值可取为^[17]:

$$K = \text{INT}[x + 4x^{1/3} + 2] \quad (20)$$

式中: $\text{INT}[]$ 表示取整函数。倒递推起始点为:

$$D_{NMx} = 0.0 + i0.0 \quad (21)$$

$$NMx = K + 15 \quad (22)$$

由此向下一直递推到 D_1 。

2) 正向递推公式^[16,20]。由式(14)可推出:

$$D_n(\rho) = -\frac{n}{\rho} + \left[\frac{n}{\rho} - D_{n-1}(\rho) \right]^{-1} \quad (23)$$

对无耗介质球:

$$D_0 = \cot(mx) \quad (24)$$

对有耗介质球, $m=m_r - im_i$:

$$D_0 = \frac{\sin(m_r x) \cos(m_i x) + \text{ish}(m_i x) \text{ch}(m_i x)}{\sin^2(m_r x) + \text{sh}^2(m_i x)} \quad (25)$$

式中, sh 和 ch 函数是无界的。当 x 很大时,会导致较大的计算误差和计算机溢出,赵振维将其重写为^[18,21]:

$$D_0 = i \frac{1 + (\cos(2m_r x) - i \sin(2m_r x)) \exp(-2m_i x)}{1 - (\cos(2m_r x) - i \sin(2m_r x)) \exp(-2m_i x)} \quad (26)$$

此时无论 x 如何增大,也不会出现计算机溢出。

3) x 很大时(通常指 $x > 30$)的正向递推公式为^[18,21]:

$$D_n(\rho) = \left[\left(\frac{n}{\rho} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (27)$$

以下将其称之为赵递推公式。对于赵递推公式,

当 $x \leq 30$ 时, 文中采用正向递推。

3 递推公式的比较与分析

利用 Mie 系数计算介质球的归一化消光截面、散射截面、后向散射截面对递推公式进行比较。由于正向递推公式中并未给出截断项, 计算中采用与后向递推公式相同的截断项 K 。对于赵递推公式, 当 $x > 30$ 时, 采用式(27)进行递推, 否则采用正向递推公式。为全面比较, 选取与文献[5]相同的折射率, 分别为 $n=1.29-j1.47$ 、 $n=1.29-j0.47$ 、 $n=1.29-j0.047$ 的强、中、弱吸收球, 利用 3 种递推公式进行计算。其对 $n=1.29-j1.47$ 的计算结果如图 1—3 所示, 对其他 2 种介质球也有类似结果。可以看出, 当 x 较小时, 正向递推公式与倒递推公式结果一致。当 x 增大到一定值(本例中约为 80) 时, 正向递推公式变得不稳定, 计算后向散射截面时尤为显著。此时赵递推公式与倒递推公式都是连续稳定的, 并趋于一致, 赵递推从逻辑上是正向的, 相对容易理解。

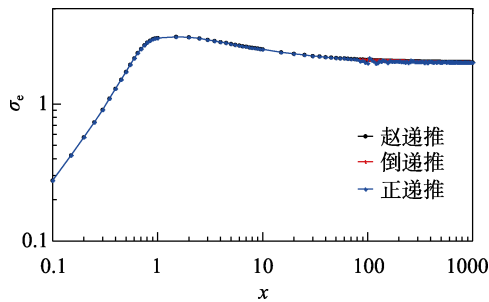


图 1 归一化消光截面随 x 的变化

Fig.1 Variation of normalized extinction cross section with x

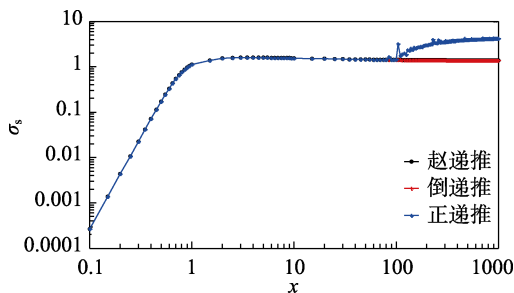


图 2 归一化散射截面随 x 的变化

Fig.2 Variation of normalized scattering cross section with x

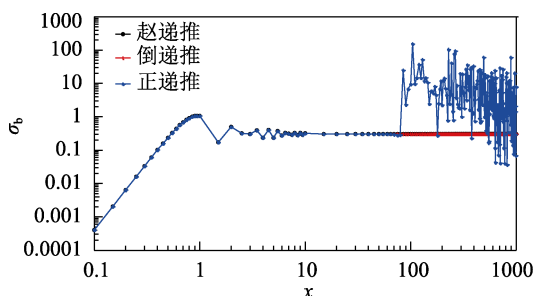


图 3 归一化后向散射截面随 x 的变化

Fig.3 Variation of normalized backscatter cross section with x

另外, 由于前面的计算都采用了相同的截断项, 下面分析截断项增大的情况。假设截断项数比式(22)增加 200, 则计算得到的倒递推公式和赵递推公式的后项散射截面如图 4 所示。可以看到, 这时倒递推仅在 $x > 6$ 时有值, 而赵递推公式此时计算结果仍然是正常的。当然, 随着截断项数的持续增加, 赵递推公式也会出现不收敛的情况, 但是显然其对截断项数的鲁棒性更强。综合上述分析, 可以认为赵递推公式最准确、适用范围最广。

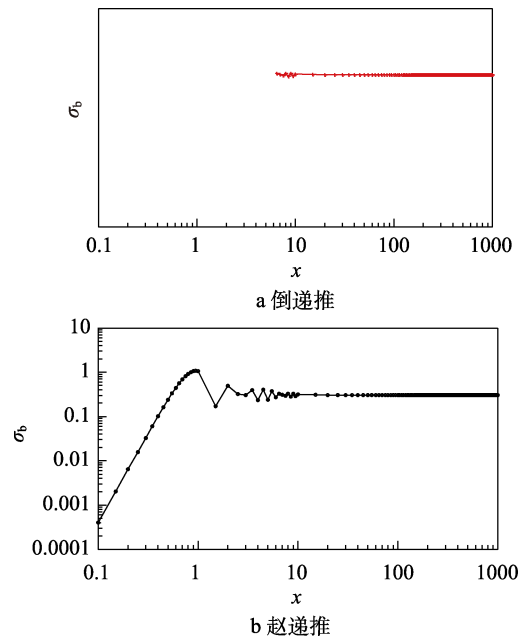


图 4 归一化后向散射截面随 x 的变化 (截断项加 200)

Fig.4 Normalized backscatter cross-section changes with x (truncation plus 200): a) backward inverse recursion; b) Zhao recursion

4 结语

文中对 Mie 系数计算中几种主要的递推公式作了分析比较, 结果显示, 赵递推公式是目前计算 Mie 系数比较理想的公式, 倒递推计算结果与赵递推相似, 但是在截断项数上赵递推有更好的鲁棒性。正向递推公式有一定的适用范围, 超过适用范围, 计算结果会发散。因此, 通常情况下, 建议采用赵递推公式。当然, 尽管是准确的解析解, 也需要实验测试来进行验证, 因为公式中都采用了近似。Mie 理论的实验测试存在较多困难, 这是未来需要进一步研究的内容。

参考文献:

- [1] STRATTON J A. Electromagnetic theory[M]. New York: McGraw Hill, 1941.
- [2] VAN DE HULST H C. Light scattering by small particles[M]. [s. l.]: Dover Publications, Inc, 1981.

- [3] OGUCHI T. Attenuation of electromagnetic wave due to rain with distorted raindrops[J]. J radio res labs, 1960, 7(33): 467-485.
- [4] OLSEN R L, ROGERS D V, HODGE D B. The aR^b relation in the calculation of rain attenuation[J]. IEEE Trans Antennas Propagat, 1978, 26(2): 318-329.
- [5] OGUCHI T. Eletromagnetic wave propagation and scattering in rain and other hydrometeors[J]. Proc IEEE, 1983, 71(9): 1029-1078.
- [6] MIE G. Beitrager zur optik trüberMedien, speziel kolloi daler metallo-sungen[J]. Ann phys leipzig, 1908, 25: 377-445.
- [7] BARBER P, YER C. Scattering of electromagnetic waves by arbitrarily shaped dielectric bodies[J]. Appl opt, 1975, 14(12): 2864-2872.
- [8] UZUNOGLU N, HOLT A R. The scattering of electromagnetic radiation from dielectric scatterers[J]. J phys A, 1976, 10(3): 413-424.
- [9] LAWS J O, PARSONS D A. The relation of raindrop size to intensity[J]. Trans am geophys union, 1943, 24: 452-460.
- [10] MARSHALL J S, PALMER W M. The distribution of raindrops with size[J]. J Meter, 1948, 5: 165-166.
- [11] JOSS J, THAMS J C, WALDVOGEL A. The variation of raindrop size distributions at Lacarno[C]// Proc of the intern Cof on Cloud Physics. Toronto: [s. n.], 1968.
- [12] AJAYI, G O, OLSEN R L. Modeling of a tropical raindrop size distribution for microwave and millimeter wave application[J]. Radio sci, 1985, 20(2): 193-202.
- [13] MAITRA A, GIBBINS C J. Modeling of raindrop size distributions from multiwavelength rain attenuation measurements[J]. Radio sci, 1999: 34(3): 657-666.
- [14] HOUZE R A. Structures of atmospheric precipitation systems: A global survey[J]. Radio sci, 1981, 16(5): 671-689.
- [15] STUTZMAN W L, DISHMAN W K. A simple model for the estimation of rain-induced attenuation along earth-space paths at millimeter wavelengths[J]. Radio sci, 1982, 17(6): 1465-1476.
- [16] ULABY F T, MOORE R K, FUNG A K. Microwave remote sensing[M]. [s. l.]: Addison-Westley Publishing Company, 1981.
- [17] BOHREN C F. Absorbing and scattering of light by small particles[M]. [s. l.]: John Wiley & Sons, Inc, 1983.
- [18] 赵振维, 吴振森, 薛谦忠. 大尺寸均匀有耗球电磁散射的算法[J]. 电波科学学报, 1999, 14(4): 422-425.
- ZHAO Z W, WU Z S, XUE Q Z. An algorithm for electromagnetic scattering of large absorptive homogeneous sphere[J]. Chinese journal of radio science, 1999, 14(4): 422-425.
- [19] 尹宏. 大气辐射学基础[M]. 北京: 气象出版社, 1993.
- YIN H. Basics of atmospheric radiology[M]. Beijing: China Meteorological Press, 1999.
- [20] 谢益溪, LAVERGNAT J, MON J P, 等. 电波传播 超短波·微波·毫米波[M]. 北京: 电子工业出版社, 1990.
- XIE Y X, LAVERGNAT J, MON J P, et al. Radiowave propagation—Ultrashort wave, microwave and millimeter wave[M]. Beijing: Publishing House of Electronic Industry, 1990.
- [21] 赵振维. 水凝物的传播特性和遥感研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2001.
- ZHAO Z W, Study on radiowave propagation characteristic and remote sensing of hydrometeors[D]. Xi'an: Xidian University, 2001.