

重大工程装备

# 跟踪微分器频率特性分析

牛宝良

(中国工程物理研究院总体工程研究所, 四川 绵阳 621999)

**摘要:** **目的** 解决跟踪微分器(TD)的参数设计问题。**方法** 对TD的工作原理、参数进行解释, 提出其参数 $R$ 与工作频率上限的关系, 建立扫频仿真模型, 通过扫频仿真获得TD的频率特性。通过不同输入幅值仿真研究其频率特性的非线性, 通过添加白噪声, 研究TD的抗噪声能力。**结果** 仿真表明, 对于输入幅值为1的情况, 由 $R$ 计算的频率上限确实反映了TD的工作频率范围。在该范围内, TD跟踪信号的幅值、相位良好; 频率超出范围后, 幅值、相位很快变差。输出幅值变小时, 频率上限扩展。时域仿真的波形展示了与频率特性一致的结果。与平滑滤波器对比仿真显示, 一般情况下, TD的跟踪信号、微分信号优于平滑滤波器, 但是信噪比很差时, 平滑滤波器反而优于TD。**结论** 解决了TD参数 $R$ 的定量设计问题, 仿真展示了TD的时域、频域特性, 为TD的应用提供了参考。

**关键词:** 伺服控制; 跟踪微分器; 微分器; Simulink;

中图分类号: TP273

文献标识码: A

文章编号: 1672-9242(2022)05-0133-07

DOI: 10.7643/issn.1672-9242.2022.05.017

## Frequency Characteristics Analysis of Tracking-differentiator

NIU bao-liang

(Institute of System Engineering, China Academy of Engineering Physics, Sichuan Mianyang 621900, China)

**ABSTRACT:** Tracking-differentiator(TD) is a kind of differentiator with better performance to solve the problem of TD's parameter design. This paper explains the working principle and parameters of the TD. proposes the relationship between its parameters  $R$  and the upper limit of operating frequency, establishes a sweep simulation model to obtain the frequency characteristics of TD; studies the non-linearity of its frequency characteristics through simulation of different input amplitudes; and studies the anti-noise capability of TD by adding white noise. Simulating results show that TD frequency up limit calculated from  $R$  presents the real frequency limit while the input magnitude is 1. In this range, the TD tracking signal has good amplitude and phase. When the frequency is out of range, the amplitude and phase become bad quickly; when the output amplitude becomes small, the upper frequency limit is extended; the waveform of time domain simulation demonstrates the results consistent with the frequency characteristics. Compared with the smoothing filter, the simulation shows that the tracking signal and differential signal of TD is better than the smoothing filter in general, but the smoothing filter is better than TD when the signal-to-noise ratio is poor. This paper solves the problem of quantitative design of TD parameter  $R$ , and the simulation shows the characteristics

收稿日期: 2021-02-08; 修订日期: 2021-05-07

Received: 2021-02-08; Revised: 2021-05-07

基金项目: 国防科工局技术基础科研项目(JSHS2018212C001)

Fund: Technical basic Research Project of National Defense Science and Technology Bureau (JSHS2018212C001)

作者简介: 牛宝良(1963—), 男, 硕士, 研究员, 主要研究方向为振动、离心试验及相关设备研发。

**Biography:** NIU Bao-liang (1963-), Male, Master, Researcher, Research focus: vibration, acceleration environmental test and equipment development.

引文格式: 牛宝良. 跟踪微分器频率特性分析[J]. 装备环境工程, 2022, 19(5): 133-139.

NIU bao-liang. Frequency Characteristics Analysis of Tracking-differentiator[J]. Equipment Environmental Engineering, 2022, 19(5): 133-139.



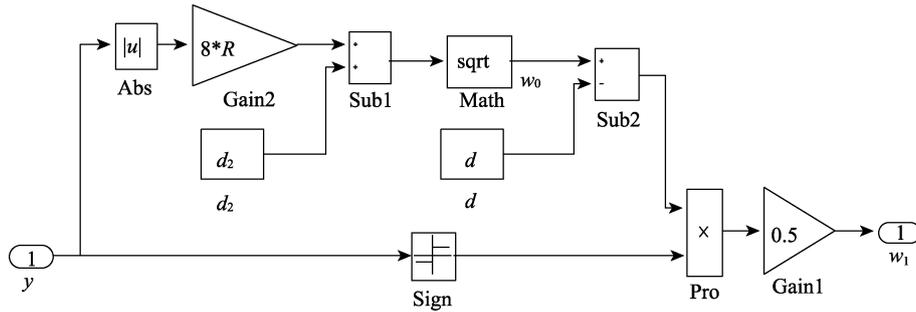


图 3  $w_1$  Sub 模块  
Fig.3 Simulink model of  $w_1$  Sub

图 1 与文献中的形式有所不同，实质未变，但是更容易分析其物理意义，而且通过仿真发现，这个形式在高频优于文献中的形式。首先，用  $t_s$  代替以往文献中的  $T$ 、 $h$ ，取消  $h_0$ ， $t_s$  在这就是采样间隔。当系统的工作频率范围确定了，相应的采样间隔也就确定了，不用再与  $R$  关联。其次，从图 1 可以看到，其实 TD 与单自由度系统的仿真模型形式上是相近的，参数  $R$  实际是对计算的加速度进行饱和和限幅，它具有加速度量纲。由于 acc Subsys 的输入是位移量纲，所以 TD 的  $R$  与单自由度系统的弹簧刚度  $K$  相当，因此有：

$$\begin{aligned} K &= \omega_n^2 \\ R &= K \\ \omega_n &= \sqrt{R} \\ f_n &= \sqrt{R} / (2\pi) \end{aligned} \quad (3)$$

这样，就把  $R$  与 TD 的工作上限频率  $f_n$  联系起来。

## 2 跟踪微分器频率特性分析

第 1 节建立了 TD 的参数  $R$  与 TD 工作频率上限的关系，本节将通过仿真来验证这一关系。由于 TD 具有强的非线性特性，因此用时域仿真方法来验证。

### 2.1 仿真模型简介

建立的仿真模型如图 4 所示。频率发生器、波形发生器用来产生扫频信号及其对应的微分信号。TD 为跟踪滤波器，输出  $x_1$ 、 $x_2$ 、acc 值 3 个信号。平滑滤波器作为对照，也输出 3 个信号。平滑滤波器是一个阻尼比为 1 的低通滤波器，其共振频率取 TD 的  $3f_n$ （仿真发现 3 倍  $f_n$  与 TD 效果接近）。波形发生器生成信号（方波、正弦），也生成相应的理想微分信号。理想微分信号用来观察 TD 微分、平滑滤波器的误差情况。

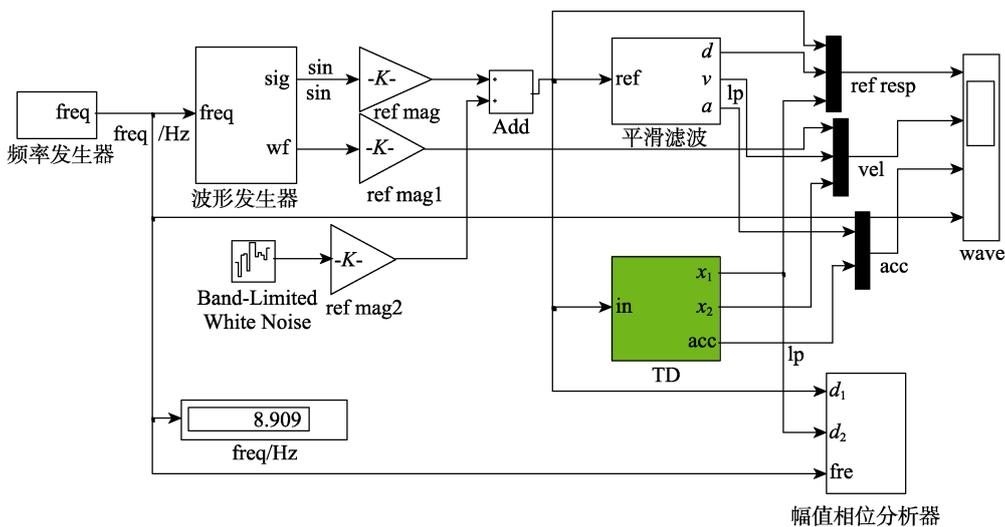


图 4 扫频仿真模型  
Fig.4 Simulink model of sweep sin simulation

### 2.2 方波仿真

仿真采样间隔  $t_s$  取  $50 \mu s$ 。跟踪微分器的上限频率  $f_n$  取  $10 \text{ Hz}$ ， $R=3\ 947.8$ 。输入信号幅值为 1，频率为  $4 \text{ Hz}$ ，仿真结果如图 5 所示。跟踪信号无超调达到

目标值，TD 得到的速度波形是规则的等腰三角形，即 0 速度起始，0 速度结束，过程很平稳，它的加速度充分利用了限定的范围  $(-R, R)$ 。在伺服控制器输入处，设置一个 TD，它自动按限定的加速度范围给出最快过程曲线作为控制目标曲线。平滑滤波器也能

在相近的时间无超调达到目标值,但是加速度已经超出  $R$  范围。仿真表明,幅值为 1、信号频率  $\leq f_n$ , 都能很好地跟随。

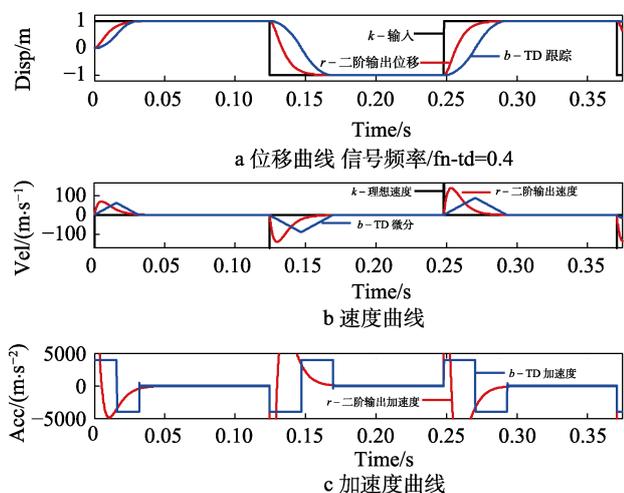


图 5 TD 方波仿真曲线

Fig.5 Waves of square wave simulation on TD: a) displacement curve; b) velocity curve; c) acceleration curve

### 2.3 扫频仿真

TD 参数  $f_n$  取 10 Hz,  $R=3\ 947.8$ 。输入信号幅值取 0.1、0.25、1, 频率取 5~100 Hz, 得到的频率特性曲线见图 6, 特征参数见表 1。设置 TD 的频率上限为 10 Hz, 跟踪信号在 10 Hz 处幅值能保持 1, 跟踪信号与输入信号的相位滞后小于  $30^\circ$  (10.37 Hz 滞后  $30^\circ$ )。  $-30^\circ \sim 90^\circ$  是快速变化的, 即设置 10 Hz 上限, TD 就能工作到 10 Hz。随着输入信号幅值的减小, 幅频、相频的截止频率扩大了。0.25 输入相比 1 输入时扩大了 1 倍, 0.1 输入相比 1 输入时扩大了 3.16 倍。从图 6 也可以看出, 斜线是重合的, 输入为 1 时的频率特性实际上是个包络, 其他更小幅值的输入被限定到这个范围。当设置跟踪微分器的上限频率  $f_n$  为其他值 (不超过 0.1  $f_s$ ) 时, 所得的频率曲线也是与图 6 相似, 即式 (3) 对于 TD 是普遍可用的。

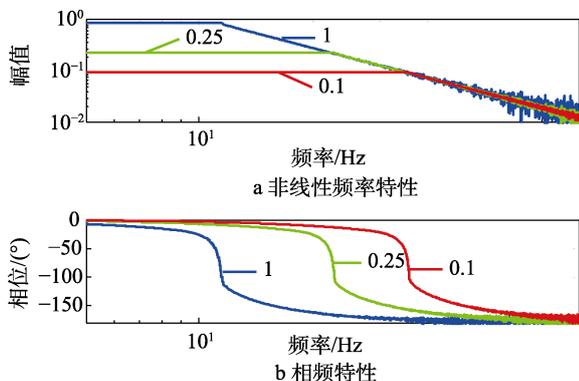


图 6 TD 的频率特性 (上限频率  $f_n=10$  Hz)

Fig.6 Frequency characteristics of TD ( $f_n=10$  Hz): a) nonlinear frequency characteristics; b) phase frequency characteristics

表 1 不同输入幅值时的特征频率

Tab.1 Characteristic frequencies of TD as different input magnitude

	信号幅值			Hz
	1	0.25	0.1	
相位滞后 $-10^\circ$	6.21	12.33	19.442	
相位滞后 $-30^\circ$	10.37	20.66	32.55	
相位滞后 $-90^\circ$	11.48	22.69	35.68	
幅值衰减 $-3$ dB	13.22	26.39	41.93	

信号频率等于 TD 上限频率  $f_n$  时的时域曲线如图 7 所示。1 V 输入时, TD 跟踪信号与输入信号有明显可见的滞后, 但是优于平滑滤波器 (截止频率为  $3f_n$ ) 输出; 微分信号滞后也小于平滑滤波器微分输出, 但是波形有失真, 这是它相位上优于平滑滤波器微分输出的代价。在加速度波形上, 两者的区别特别显著。0.1 V 输入时, TD 跟踪信号与输入信号重合, 平滑滤波器输出则有明显滞后; TD 的微分信号也是与理想

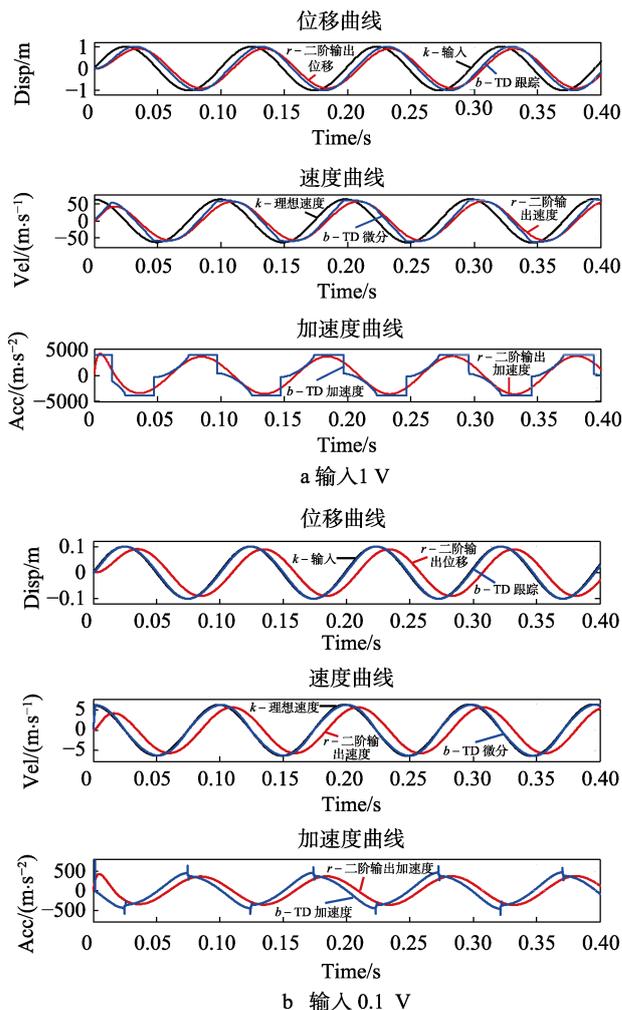


图 7 信号频率等于 TD 上限频率  $f_n$  时的时域曲线

Fig.7 Time waves while sin wave signal frequency equal TD  $f_n$ : a) input 1 V; b) input 0.1 V

微分信号也是重合的；在加速度波形上，TD 的加速度在峰顶峰谷有毛刺和跳变，平滑滤波器输出则是规则正弦。这是 TD 相比平滑滤波器的优点，信号幅值减小时，频带扩大。

### 2.4 含有噪声时仿真

实际信号中常常含有噪声。为此，加入一定的白噪声，来观察效果。图 8a 的信号频率比较低，为 TD 上限频率的 1/2，TD 跟踪幅值好，相比平滑滤波器输出占有优势。图 8b 信号频率达到 TD 上限频率  $f_n$ ，

TD 跟踪幅值较好，但是相位反而滞后平滑滤波器(无噪声时相位是优于平滑滤波器，可见噪声带来了不利影响)。从加速度曲线可以看到，正常情况下加速度直接到负最大或正最大，由于噪声影响，从负最大到正最大震荡一段时间才能保持在正最大。图 8c 的信号频率也 TD 上限频率的 1/2，信号幅值减小到 0.1，输入信号的信噪比很差，出现一个比较反常的现象，TD 跟踪信号、TD 微分信号上出现了一个震荡信号，震荡信号的幅值与有用信号相当，而平滑滤波器的跟踪信号、微分信号更好。

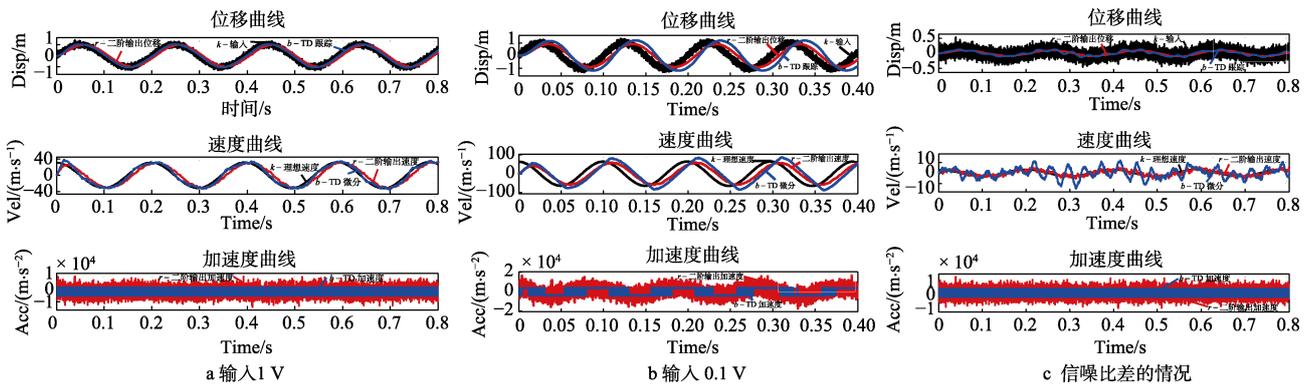


图 8 有噪声信号频率等于 TD 上限频率  $f_n$  时的时域曲线

Fig.8 Time waves with noise while signal frequency equal TD  $f_n$ : a) input 1 V; b) input 0.1 V; c) poor signal-to-noise ratio

## 3 跟踪微分器的应用

第 2 节已经分析得到，TD 的上限频率与  $R$  有关，同时还与输入幅值有关。对于输入为 1 的 TD，上限频率  $f_n$  与  $R$  满足式 (3)。在工程应用中，假设输入信号的范围是  $\pm x_{max}$ ，在 TD 的前后分别加一个比例环节，TD 前的比例是  $1/x_{max}$ ，TD 后的比例是  $x_{max}$ 。这样，既能满足输入信号范围  $x_{max}$ ，又能满足指定的频率范围。

关于  $t_s$  的取值，其实与 TD 的关系不大，通常由伺服控制系统的上限频率决定。假设伺服控制系统的上限工作频率为  $f_u$ ，则数字伺服控制系统的采样频率  $f_s$ 、采样间隔  $t_s$  由式 (4) 计算得到。

$$f_s = f_u \cdot (10 \sim 20) \tag{4}$$

$$t_s = 1 / f_s$$

## 4 减小跟踪信号滞后的改进

TD 生成的跟踪信号，总是存在一定的滞后，信号频率/TD 上限频率越大，滞后越大。在仿真中发现，一个小改进可以减小 1 拍的滞后。如图 9 所示，从积分器 (integrator1) 输出再接一个积分器 (integrator3)，积分方式选为后向欧拉法，用它来替代  $x_1$ ，比原  $x_1$  可以提前 1 拍。仿真结果如图 10 所示，采样频率为 100 Hz，TD 截止频率为 5 Hz，输入方波频率为 1 Hz。

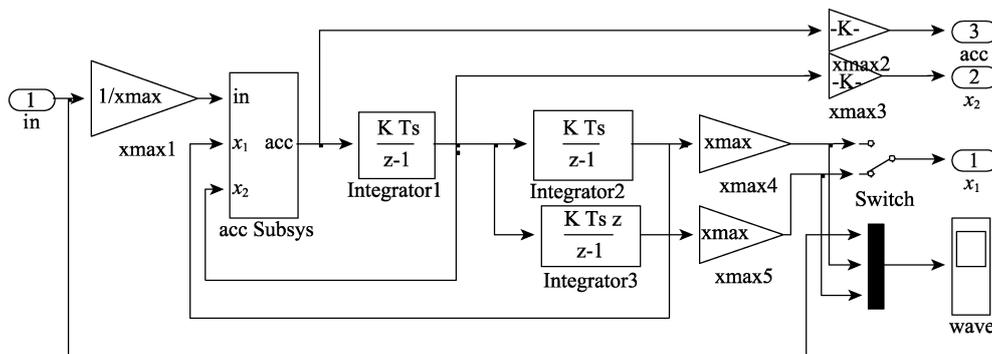


图 9 改进后的 TD  
Fig.9 Improved TD

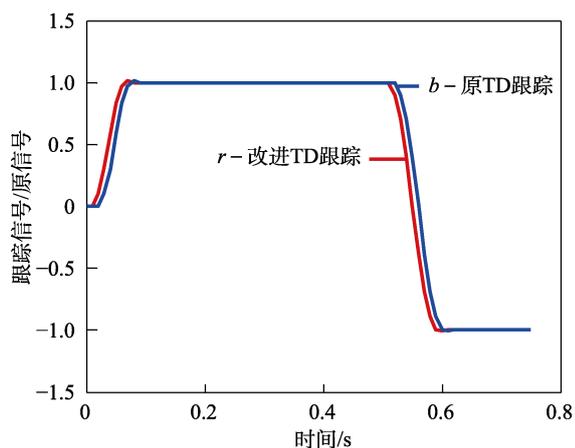


图 10 改进后 TD 的跟踪信号与原信号比较  
Fig.10 Compare wave of improved TD with wave of TD

## 5 结论

本文研究了 TD 的频率特性, 提出了输入幅值为 1 时频率上限  $f_n$  与 TD 参数  $R$  之间的关系。通过时域仿真验证了该关系的正确性, 解决了定量确定 TD 的  $R$  参数问题。

TD 的频率特性随输入信号幅值的改变而变化, 幅值越小, 频带越大, 高幅值的幅频曲线包围低幅值的幅频曲线。对于输入幅值不是 1 时, 宜进行归一化处理, 在 TD 之后再恢复原量级, 这样可以达到跟踪微分的目的, 同时带宽刚刚好, 因此滤波效果好, 抑制噪声最佳。

信号频率小于 TD 的上限频率  $f_n$  时, 幅频、相频特性都比较好。输入幅值为 1, 信号频率等于  $0.62f_n$  时, 相位滞后不大于  $10^\circ$ ; 信号频率等于  $f_n$  时, 相位滞后  $26^\circ$ 。相频曲线在  $1.1f_n$  附近呈现快速变化的特征,  $1.15f_n$  时滞后达  $90^\circ$ 。因此, 建议信号频率在  $0\sim 0.62f_n$  为佳, 最多取到  $0\sim f_n$ 。在微分信号后新增一个后向欧拉积分器, 可以获得跟踪信号在相位上提前 1 拍的效果。多数情况下, TD 的幅频、相频优于平滑滤波器, 但是在信噪比很差时, 平滑滤波器反而优于 TD。

综上所述, 明确积分步长与系统采样间隔相一致, 建立参数  $R$  与 TD 工作频率上限之间的关系后, 将极大方便 TD 的设计, 也将推动 TD 更多应用。

### 参考文献:

- [1] 韩京清, 王伟. 非线性跟踪—微分器[J]. 系统科学与数学, 1994, 14(2): 177-183.  
HAN Jing-qing, WANG Wei. Nonlinear tracking-Differentiator[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 1994, 14(2): 177-183.
- [2] 韩京清, 袁露林. 跟踪-微分器的离散形式[J]. 系统科学与数学, 1999, 19(3): 268-273.  
HAN Jing-qing, YUAN Lu-lin. The Discrete Form of tracking-Differentiator[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 1999, 19(3): 268-273.
- [3] 陈怡然, 孙秀霞, 彭建亮. 一种简洁的离散快速无振荡跟踪-微分器的设计[J]. 电光与控制, 2011, 18(1): 77-81.  
CHEN Yi-ran, SUN Xiu-xia, PENG Jian-liang. Design of a Discrete High-Speed Tracking-Differentiator without Chattering[J]. Electronics Optics & Control, 2011, 18(1): 77-81.
- [4] 景奉水, 梁自泽, 侯增广, 等. 自适应跟踪微分器的研究[C]//第 21 届中国控制会议论文集. 杭州: 浙江大学, 2002.  
JING Feng-shui, LIANG Zi-ze, Hou Zeng-guang, et al. Study on Adaptive Tracking Differentiator[C]//Proceedings of 21th Chinese Control Conference. Hangzhou: Zhejiang University, 2002.
- [5] 李冀鑫, 侯志强, 郑小洪. 离散跟踪微分器在着舰引导滤波中的应用[J]. 飞行力学, 2008, 26(4): 69-72.  
LI Ji-xin, HOU Zhi-qiang, ZHENG Xiao-hong. Application of Discrete Tracking Differentiator to Carrier Landing Guidance Filtering[J]. Flight Dynamics, 2008, 26(4): 69-72.
- [6] 高天龙, 秦开宇, 何衡湘. 基于跟踪微分器的非线性 PID 控制器设计[J]. 电子质量, 2010(2): 1-2.  
GAO Tian-long, QIN Kai-yu, HE Heng-xiang. Nonlinear Tracking-Differentiator-Based PID Controller Design[J]. Electronics Quality, 2010(2): 1-2.
- [7] 王雅平, 齐晓慧, 张昊, 等. 无人动力伞带跟踪微分器的高度控制方法[J]. 电光与控制, 2015, 22(1): 72-75.  
WANG Ya-ping, QI Xiao-hui, ZHANG Hao, et al. An Integral-Ahead Control Method with Tracking Differentiator for an Unmanned Powered Paraglider[J]. Electronics Optics & Control, 2015, 22(1): 72-75.
- [8] 綦慧, 田正. 跟踪微分器在 APF 中的应用[J]. 电力电子技术, 2017, 51(10): 74-76.  
QI Hui, TIAN Zheng. Application of Tracking Differentiator in APF[J]. Power Electronics, 2017, 51(10): 74-76.
- [9] 朱枫, 张葆, 李贤涛, 等. 跟踪微分器在陀螺信号去噪方面的应用[J]. 中国光学, 2017, 10(3): 355-362.  
ZHU Feng, ZHANG Bao, LI Xian-tao, et al. Application of Tracking Differentiator to Gyro Signal Denoising[J]. Chinese Optics, 2017, 10(3): 355-362.
- [10] 朱家厅, 孟淑平, 张立娟, 等. 基于线性跟踪微分器的数字阀电机控制系统[J]. 液压与气动, 2019(12): 114-118.  
ZHU Jia-ting, MENG Shu-ping, ZHANG Li-juan, et al. Motor Control System of Digital Valve Based on Linear Tracking Differentiators[J]. Chinese Hydraulics & Pneumatics, 2019(12): 114-118.
- [11] 魏志强, 程勇策, 辛林杰, 等. 非线性跟踪微分器在光电吊舱跟踪系统中的应用研究[J]. 电视技术, 2020, 44(4): 39-43.  
WEI Zhi-qiang, CHENG Yong-ce, XIN Lin-jie, et al. Application of Nonlinear Tracking Differentiator in Photoelectric Pod Tracking System[J]. Video Engineering, 2020, 44(4): 39-43.

- [12] 朱建华, 孙秀霞, 王春山. 采用 Simulink 实现跟踪—微分器[J]. 现代电子技术, 2002, 25(7): 46-48.  
ZHU Jian-hua, SUN Xiu-xia, WANG Chun-shan. Realization of Tracking-Differentiator Based of Simulink[J]. Modern Electronic Technique, 2002, 25(7): 46-48.
- [13] 李岷钊. 基于 Simulink 跟踪微分器的仿真分析[J]. 集成电路应用, 2019, 36(8): 100-101.  
LI Min-zhao. Study on Simulation of Simulink Tracking Differentiator[J]. Application of IC, 2019, 36(8): 100-101.
- [14] 牛宝良. 振动信号的全频带三参量测量[J]. 装备环境工程, 2017, 14(12): 51-54.  
NIU Bao-liang. Three Variable Measurement on Whole Frequency Band of Vibration Signal[J]. Equipment Environmental Engineering, 2017, 14(12): 51-54.
- [15] 韩京清. 从 PID 技术到“自抗扰控制”技术[J]. 控制工程, 2002, 9(3): 13-18.  
HAN Jing-qing. From PID Technique to Active Disturbances Rejection Control Technique[J]. Basic Automation, 2002, 9(3): 13-18.
- [16] 韩京清. 自抗扰控制技术: 估计补偿不确定因素的控制技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.  
HAN Jing-qing. Active Disturbance Rejection Control Technique: The Technique for Estimating and Compensating the Uncertainties[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008.
- [17] 黄焕袍, 万晖, 韩京清. 安排过渡过程是提高闭环系统“鲁棒性、适应性和稳定性”的一种有效方法[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(S1): 89-94.  
HUANG Huan-pao, WAN Hui, HAN Jing-qing. Arranging the Transient Process is an Effective Method Improved the “Robustness, Adaptability and Stability” of Closed-Loop System[J]. Control Theory & Applications, 2001, 18(S1): 89-94.
- [18] 韩京清, 黄远灿. 二阶跟踪—微分器的频率特性[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(3): 71-74.  
HAN Jing-qing, HUANG Yuan-can. Frequency Characteristic of Second-Order Tracking-Differentiator[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2003, 33(3): 71-74.
- [19] 朱承元, 杨涤, 荆武兴. 跟踪微分器参数与输入输出信号幅值频率关系[J]. 电机与控制学报, 2005, 9(4): 376-379.  
ZHU Cheng-yuan, YANG Di, JING Wu-xing. Relation Equations among the Parameters of Tracking-Differentiator and the Amplitude and Frequency of Its Input-Output Signals[J]. Electric Machines and Control, 2005, 9(4): 376-379.
- [20] 邵星灵, 王宏伦. 基于改进 Sigmoid 函数的非线性跟踪微分器[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(8): 1116-1122.  
SHAO Xing-ling, WANG Hong-lun. Nonlinear Tracking Differentiator Based on Improved Sigmoid Function[J]. Control Theory & Applications, 2014, 31(8): 1116-1122.

责任编辑: 刘世忠