

武器装备

# 考虑材料应变率效应的冲击响应模型相似律研究

王傲寒<sup>1,2</sup>, 王帅<sup>1,2</sup>, 李继承<sup>1,2\*</sup>

(1. 中国工程物理研究院总体工程研究所, 四川 绵阳 621999;  
2. 工程材料与结构冲击振动四川省重点实验室, 四川 绵阳 621999)

**摘要:** **目的** 研究考虑材料应变率效应的冲击响应模型相似律, 获得一个能够综合材料弹塑性和应变率效应的精确相似解, 支撑工程领域的模型试验。**方法** 根据 Buckingham  $\Pi$  定理, 综合考虑材料的弹性、应变硬化和应变率效应, 进一步推导了工程结构在冲击响应的模型相似律表达式。在此基础上, 提出改变结构质量和冲击器速度来满足模型相似律的方法。**结果** 相比最近冲击模型相似律的研究中存在近似相似、迭代求解的缺陷, 该方法是一个显式、完全精确的相似解, 并且能够同时考虑材料的弹性、应变硬化和应变率效应。采用圆板撞击的有限元数值模型进行了验证。**结论** 推导出的模型相似律能够准确地预测原型的动态冲击的响应。相比而言, 使用以往的相似方法具有明显的误差。

**关键词:** 应变率; 模型相似律; 相似; 缩比; 冲击; 模化方程

中图分类号: O303 文献标志码: A 文章编号: 1672-9242(2024)04-0055-07

DOI: 10.7643/issn.1672-9242.2024.04.007

## Comparability Rule of Impact Dynamic Responses Considering Strain Rate Effect in Materials

WANG Aohan<sup>1,2</sup>, WANG Shuai<sup>1,2</sup>, LI Jicheng<sup>1,2\*</sup>

(1. Institute of Systems Engineering, China Academy of Engineering Physics, Sichuan Mianyang 621999, China; 2. Sichuan Provincial Key Laboratory for Shock and Vibration of Engineering Materials and Structures, Sichuan Mianyang 621999, China)

**ABSTRACT:** The work aims to investigate the comparability rule of impact dynamic responses considering strain rate effect in materials and obtain an accurate solution that can synthesize the elastic-plastic and strain rate effects of materials, to support the model test in engineering. Considering the elasticity, strain hardening effect and strain rate effect of materials, the comparability rule expressions of impact dynamic responses were derived based on Buckingham  $\Pi$  theorem. On this basis, the method of changing the structure mass and impactor velocity to satisfy the similar conditions of the model was proposed. Compared with the recent model comparability rules with the weakness of approximate similarity and iterative solution, the proposed comparability rule was a direct and accurate solution and further took both the elastic-plastic and strain rate effects of materials into ac-

收稿日期: 2023-11-30; 修订日期: 2024-03-18

Received: 2023-11-30; Revised: 2024-03-18

基金项目: 中国工程物理研究院院长基金自强项目 (YZJJZQ2023010); 四川省自然科学基金杰出青年科学基金项目 (2023NSFSC1913); 国家国防科技工业局科研专项项目 (KJSP2023020304)

**Fund:** President Foundation of China Academy of Engineering Physics (YZJJZQ2023010); Outstanding Young Scientist Foundation of Sichuan Province of China (2023NSFSC1913); Scientific Research Special Project of State Administration of Science, Technology and Industry for National Defence, PRC (KJSP2023020304)

引文格式: 王傲寒, 王帅, 李继承. 考虑材料应变率效应的冲击响应模型相似律研究[J]. 装备环境工程, 2024, 21(4): 55-61.

WANG Aohan, WANG Shuai, LI Jicheng. Comparability Rule of Impact Dynamic Responses Considering Strain Rate Effect in Materials[J]. Equipment Environmental Engineering, 2024, 21(4): 55-61.

\*通信作者 (Corresponding author)

count. The numerical model of circular plate under impactor was used for verification. The model derived can accurately predict the dynamic response of the prototype model. Comparatively, there are usually obvious prediction errors when previous similar methods are adopted.

**KEY WORDS:** strain rate; model comparability rule; similarity; scaling; impact; normalized equation

大型工程结构在爆炸和冲击载荷下的安全防护越来越受到重视。然而,这些工程结构在设计之初通常难以进行 1:1 的模型试验,因而缺乏试验验证。采用缩比模型替代原型进行试验,为这些工程结构的试验设计提供了有效的技术手段<sup>[1]</sup>。这种技术对于建筑物的安全设计,以及工程领域船舶、飞机、核设施的防护设计,具有显著的经济效益。因而,发展缩比模型的相似律,是工程领域必不可少的热点话题。

目前,考虑弹性和应变硬化效应的传统的模型相似律已广泛应用于工程领域的研究<sup>[2-3]</sup>。但是,针对建筑物广泛采用的钢结构进行的缩比试验还很少涉及。一个重要的原因在于,工程领域广泛采用的钢材料通常具有显著的应变率效应,此时传统模型相似律往往是无能为力的,导致缩比模型不能准确预测原型响应<sup>[2-7]</sup>。

近年来,通过改变初始条件的方法克服应变率效应的技术路线,得到了较为广泛的重视。这一新的技术,最初由 Drazetic 等<sup>[8]</sup>提出,并用于验证矩形截面管的动态屈曲,得到了较好的相似结果。Oshiro 等<sup>[9-13]</sup>进一步系统地发展了该技术,不仅改变了冲击速度,还尝试单独地改变冲击器质量,以合理地考虑应变率的影响。在国内,张振华等<sup>[14-17]</sup>采用该技术,较好地预测了爆炸载荷下加筋板结构的动态响应,对船舶的爆炸防护具有工程价值。蒋正荣等<sup>[18-19]</sup>发展了一种改变结构质量的技术,从而应用于单层网壳结构的模型试验。徐坤等<sup>[20]</sup>将该方法应用于 Taylor 杆的碰撞实验,取得了良好的效果。魏德敏等<sup>[21]</sup>通过对网壳结构的不同部位分配不同的质量,进一步提高了这种技术的相似精度。为了综合考虑材料的应变硬化、应变率效应和热软化效应等性质,近期 Sadeghi 等<sup>[22-24]</sup>基于有限相似的概念,提出了基于连续介质理论和有限相似方程的有限相似修正方法应用于缩比试验设计。

然而,前述这些技术理论目前仍难以充分考虑材料的弹性和应变硬化效应,大部分针对应变率效应的研究,直接简化了弹性和应变硬化效应。部分工作虽综合考虑了多种效应,但推导和计算的过程过于复杂,甚至不同效应推导得到的相似条件可能存在相互矛盾的情形,难以付诸实施。因此,在综合考虑多种效应的简化冲击相似律方面,还需要开展进一步的研究。本文对同时考虑材料弹性、应变硬化和应变率效应的相似理论进行了重新推导,对新提出的模型相似律的优势进行了探讨,并采用数值模型进行了试验验证,该研究对工程领域模型试验具有实际意义。

## 1 模型相似律推导

### 1.1 模化方程

结构受冲击物撞击,需综合考虑材料因素、几何因素、碰撞因素 3 个方面的输入因素<sup>[2]</sup>。

1) 对于材料,有密度  $\rho$ 、弹性模量  $E$ 、泊松比  $\nu$ 、屈服应力  $\sigma$ 、材料的应变硬化和应变率效应  $f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ 。根据本构关系,可将屈服应力  $\sigma_0$  和  $f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$  综合为动态应力  $\sigma = \sigma_0 f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ 。

2) 对于几何,有长度  $L$ 、宽度  $B$ 、厚度  $H$  等 3 方面的尺寸因素。

3) 对于冲击物,有冲击器速度  $v_0$  以及冲击器质量  $M$  等 2 方面的因素。

选取结构位移  $w$ 、运动时间  $t$  为关注的动态响应,当使用应变硬化和应变率效应的材料,还需要关注平均的应变  $\varepsilon$  和平均的应变率  $\dot{\varepsilon}$ 。在冲击运动完成时,这些物理量的物理关系可以假设为:

$$g_i(\rho, E, \nu, \sigma, L, B, H, v_0, M, w, t, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) = 0 \quad (1)$$

式中:  $i$  分别针对  $w$ 、 $t$ 、 $\varepsilon$ 、 $\dot{\varepsilon}$  形成函数关系。

取长度  $L$ 、速度  $v_0$ 、冲击器质量  $M$  为基本变量,得到各物理量的量纲矩阵如表 1 所示。

表 1 物理量的量纲矩阵  
Tab.1 Dimensional matrices of physical quantities

| 循环变量                | $L$ | $v_0$ | $M$ |
|---------------------|-----|-------|-----|
| $w$                 | 1   | 0     | 0   |
| $t$                 | 1   | -1    | 0   |
| $\varepsilon$       | 0   | 0     | 0   |
| $\dot{\varepsilon}$ | -1  | 1     | 0   |
| $\rho$              | -3  | 0     | 1   |
| $E$                 | 3   | 2     | 1   |
| $\nu$               | 0   | 0     | 0   |
| $\sigma$            | 3   | 2     | 1   |
| $B$                 | 1   | 0     | 0   |
| $H$                 | 1   | 0     | 0   |

因此,根据 Buckingham  $\Pi$  定理<sup>[1-2]</sup>,使用表 1 进行无量纲的模化,方程 (1) 可以被简化为:

$$g_i \left( \frac{\rho L^3}{M}, \frac{EL^3}{Mv_0^2}, \nu, \frac{\sigma L^3}{Mv_0^2}, \frac{B}{L}, \frac{H}{L}, \frac{w}{L}, \frac{tv_0}{L}, \varepsilon, \frac{\dot{\varepsilon}L}{v_0} \right) = 0 \quad (2)$$

式 (2) 给出了考虑应变硬化和应变率效应的无量纲的物理关系。

## 1.2 模型相似条件

基于式 (2) 的模化方程, 当模型和原型使用相同材料, 推导相似条件如下: 设模型和原型的尺寸之比为  $\lambda_L=L_m/L_p$ 、初始速度之比为  $\lambda_v=(v_0)_m/(v_0)_p$ 、冲击器质量之比为  $\lambda_M=M_m/M_p$ 。

对于输出参数相似, 可推导出:

$$\frac{w_m}{L_m} = \frac{w_p}{L_p} \rightarrow \lambda_w = \lambda_L \quad (3)$$

$$\frac{t_m(v_0)_m}{L_m} = \frac{t_p(v_0)_p}{L_p} \rightarrow \lambda_t = \lambda_L / \lambda_v \quad (4)$$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_p \rightarrow \lambda_\varepsilon = 1 \quad (5)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_m L_m}{(v_0)_m} = \frac{\dot{\varepsilon}_p L_p}{(v_0)_p} \rightarrow \lambda_{\dot{\varepsilon}} = \lambda_v / \lambda_L \quad (6)$$

对输入参数, 几何相似要求:

$$\frac{B_m}{L_m} = \frac{B_p}{L_p} \rightarrow \lambda_B = \lambda_L \quad (7)$$

$$\frac{H_m}{L_m} = \frac{H_p}{L_p} \rightarrow \lambda_H = \lambda_L \quad (8)$$

当仅考虑弹性效应, 材料相似要求:

$$\frac{E_m L_m^3}{M_m (v_0)_m^2} = \frac{E_p L_p^3}{M_p (v_0)_p^2} \rightarrow \lambda_E = \lambda_M \lambda_v^2 / \lambda_L^3 \quad (9)$$

$$(v)_m = (v)_p \rightarrow \lambda_v = 1 \quad (10)$$

当仅考虑应变硬化和应变率效应, 材料相似要求:

$$\frac{\sigma_m L_m^3}{M_m (v_0)_m^2} = \frac{\sigma_p L_p^3}{M_p (v_0)_p^2} \rightarrow \lambda_\sigma = \lambda_M \lambda_v^2 / \lambda_L^3 \quad (11)$$

将式 (5)、(6)、(11) 代入本构  $\sigma = \sigma_0 f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$

得到:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_p} = \frac{\lambda_{\sigma_0} f(\varepsilon_m, \dot{\varepsilon}_m)}{f(\varepsilon_m, \dot{\varepsilon}_m \lambda_L / \lambda_v)} = \lambda_M \lambda_v^2 / \lambda_L^3 \rightarrow \lambda_L / \lambda_v = 1 \quad (12)$$

考虑结构的密度相似, 得到:

$$\frac{\rho_m L_m^3}{M_m} = \frac{\rho_p L_p^3}{M_p} \rightarrow \lambda_\rho = \lambda_M / \lambda_L^3 \quad (13)$$

上面的推导表明, 对于综合考虑弹性、应变硬化和应变率效应的材料, 完全相似时, 输入条件需同时满足  $\lambda_B = \lambda_L$ 、 $\lambda_H = \lambda_L$ 、 $\lambda_v = \lambda_L$ 、 $\lambda_E = \lambda_\sigma = \lambda_M \lambda_v^2 / \lambda_L^3$ 、 $\lambda_\sigma = \lambda_{\sigma_0}$ 、 $\lambda_v = 1$  以及  $\lambda_\rho = \lambda_M / \lambda_L^3$ 。由于模型和原型使用相同材料, 那么  $\lambda_{\sigma_0} = 1$ 、 $\lambda_E = 1$ 、 $\lambda_v = 1$ , 上述相似条件被进一步简化。可见, 新模型相似律的关键在于改变冲击器的速度以及模型结构的密度。以上推导的基本假设为原型和模型材料相同, 因此模型密度的改变并非材料的更换, 其核心在于不改变结构构型的基础上调整模型的惯性。此外, 一般来说, 质量缩放因子  $\lambda_M$  应

当等于尺寸比例因子  $\lambda_L$  的 3 次方, 但由于新的模型相似律需要改变结构密度, 这里  $\lambda_M$  的推导结果为  $\lambda_L$ 。综上所述, 推导得到的模型和原型物理量之比见表 2。

表 2 模型和原型物理量之比  
Tab.2 Ratio of model and prototype

| 物理量   | 符号                  | 比值               |
|-------|---------------------|------------------|
| 长度    | $L$                 | $\lambda_L$      |
| 宽度    | $B$                 | $\lambda_L$      |
| 高度    | $H$                 | $\lambda_L$      |
| 冲击器速度 | $v_0$               | $\lambda_L$      |
| 冲击器质量 | $M$                 | $\lambda_L$      |
| 结构密度  | $\rho$              | $\lambda_L^{-2}$ |
| 位移    | $w$                 | $\lambda_L$      |
| 时间    | $t$                 | 1                |
| 动态应力  | $\sigma$            | 1                |
| 应变    | $\varepsilon$       | 1                |
| 应变率   | $\dot{\varepsilon}$ | 1                |

## 1.3 与通用方法比较

最近发展的工程结构冲击模型相似律, 以文献 [9-12] 提出的 VSG (速度-动态应力-碰撞质量) 技术为代表, 通常使用关系  $\lambda_\sigma = \lambda_v^2$ 、 $\lambda_{\dot{\varepsilon}} = \lambda_v / \lambda_L$ 、 $\lambda_t = \lambda_L / \lambda_v$ 、 $\lambda_w = \lambda_L$  来表达模型和原型物理量之比。这个技术的关键在于对应变率效应的材料改变冲击速度, 改变因子为:

$$\lambda_v = \sqrt{f(\lambda_v, \dot{\varepsilon}_m^{nc}) / f(\lambda_L \dot{\varepsilon}_m^{nc})} \quad (14)$$

式中:  $\dot{\varepsilon}_m^{nc}$  是按照传统模型相似律不改变速度 ( $\lambda_v = 1$ ) 时的应变率。显然, 它需要平均应变率进行迭代求解, 从而得到  $\lambda_v$ , 因而较为复杂, 不实用。此外, 这种相似仅针对应变率的均值而言, 因而并不精确。

将本文提出的方法命名为 LVM (即  $L$ 、 $v_0$ 、 $M$ ), 相比 VSG 而言, 具有以下优势:

1) VSG 相似条件是隐式的, 需使用结构响应与材料本构迭代求解; 而 LVM 相似条件是显式的, 仅与  $\lambda_L$  相关, 且无需迭代。

2) VSG 是对应变率平均值的近似, 而 LVM 对任意应变和应变率都适用。

3) VSG 仅考虑应变率效应, 而 LVM 同时包含应变率、弹性和应变硬化效应。

## 2 数值算例验证

### 2.1 有限元模型建立

采用一个中心受刚性质量块冲击器撞击的固支圆板模型进行验证, 如图 1 所示。圆板直径  $\phi = 0.6 \text{ m}$ 、厚

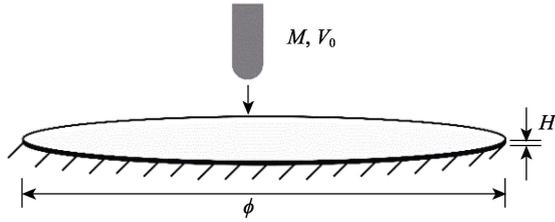


图1 固支圆板受刚性质量块撞击模型  
Fig.1 Model of fixed supported circular plate impacted by a rigid mass block

度  $H=0.8 \times 10^{-2}$  m; 冲击器质量  $M=0.32$  kg, 冲击器速度  $v_0=140$  m/s。冲击器前缘为半球型(直径为  $3.2 \times 10^{-2}$  m)。

利用显式动力学分析程序建立有限元模型, 圆板设为轴对称单元, 在半径和厚度方向网格设置为  $300 \times 8$  层, 在该条件下, 网格尺寸对数值模拟结果误差的影响较小。接触为面接触, 刚性质量块使用刚性化约束。圆板的本构关系使用 Johnson-Cook 模型, 即  $\sigma = (A + \bar{B}\epsilon^n)(1 + \ln \dot{\epsilon}^*)$ , 其中  $A$  为准静态屈服应力,  $\bar{B}$ 、 $n$  为应变硬化参数,  $C$  为应变率参数,  $\dot{\epsilon}^* = \dot{\epsilon} / \dot{\epsilon}_0$ ,  $\dot{\epsilon}_0$  为参考应变率。圆板材料使用应变率敏感的 1006 钢, 材料参数: 密度为  $7.85 \times 10^{-3}$  kg/m<sup>3</sup>, 弹性模量 200 MPa, 泊松比为 0.3,  $A=350$  MPa、 $\bar{B}=275$  MPa、 $n=0.36$ 、 $C=0.22$ 、 $\dot{\epsilon}_0 = 1 \text{ s}^{-1}$  [25]。

## 2.2 仅考虑应变率的验证

分别使用已有的 VSG 方法和本文提出的 LVM 方法进行验证对比, 计算  $\lambda_L=1/10$  缩比尺寸下冲击数值仿真结果。试验中, 测量冲击器位移、速度、与圆板的接触力以及冲击总动能的变化, 与全尺寸原型结果对比。

假定材料仅存在应变率效应, 由于在高速冲击下, 弹性影响较小, 可以忽略不计, 因而仅将硬化参数  $\bar{B}$  设为 1 MPa, 以抵消应变硬化效应, 从而得到一个应变率效应起主导作用的冲击模型。对使用 VSG, 基于受中心冲击的四周固支圆盘变形特征, 原型的平均塑性应变率可简单地取圆盘中心塑性应变率峰值的 1/2, 再结合数值模拟结果, 可得其取值约为  $\dot{\epsilon}_{ave} = 800 \text{ s}^{-1}$ 。按照传统模型相似律, 得到模型应变率  $\dot{\epsilon}_m^{nc} = \dot{\epsilon}_{ave} / \lambda_L = 8000 \text{ s}^{-1}$ 。由式 (14) 求得速度因子  $\lambda_v=1.102$ 。从而, 模型的尺寸、冲击速度分别按照  $\lambda_L=1/10$ 、 $\lambda_v=1.102$  缩放。对使用 LVM, 模型的尺寸、冲击速度分别按照  $\lambda_L=1/10$ 、 $\lambda_v=0.1$  缩放。此外, 模型的质量按照  $\lambda_M=\lambda_L$  进行缩放。在有限元中, 通过改变材料的密度便捷地实现。

使用 VSG 方法和 LVM 方法模型预测原型的计算结果如图 2 所示, 图中横/纵坐标均进行了反向缩放

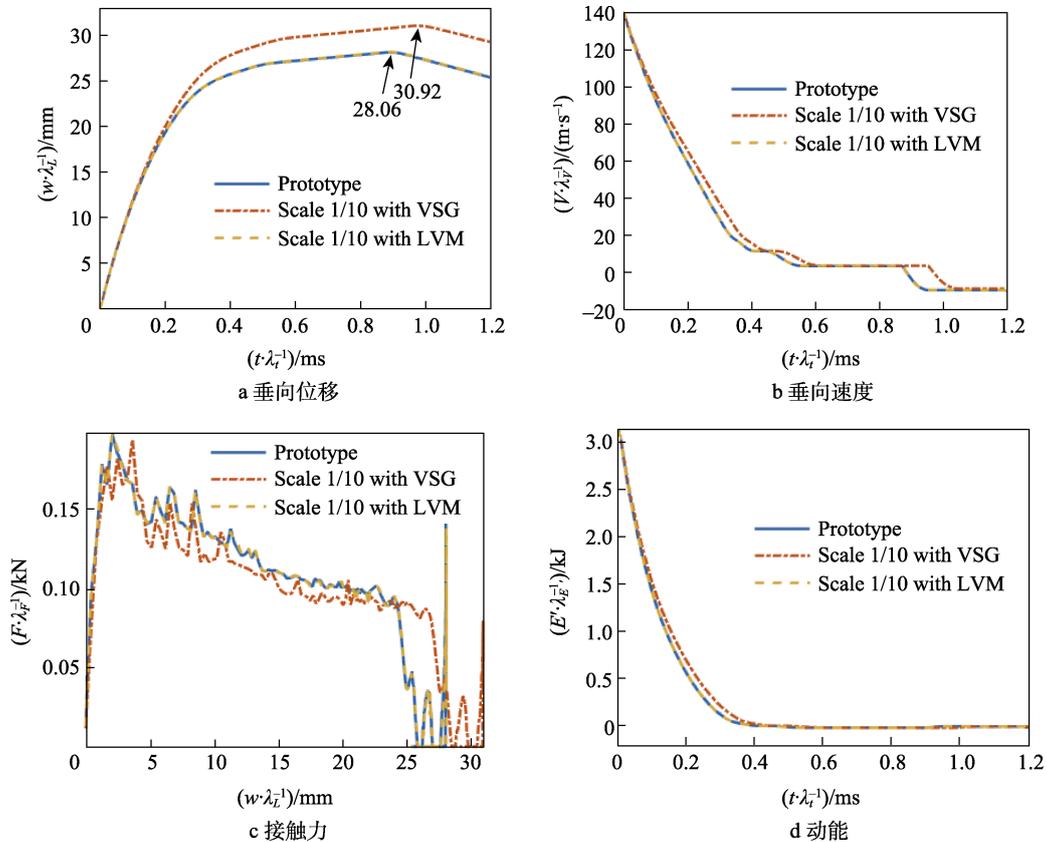


图2 不同方法固支圆板撞击测试结果对比

Fig.2 Comparison of impact test results of fixed supported circular plates with different methods: a) vertical displacement; b) vertical velocity; c) contact force; d) kinetic energy

还原处理。可以看到, 当使用 VSG 方法后, 模型的位移、速度、力以及能量都有明显的误差。而使用本文提出的 LVM 方法, 这些预测的输出量与原型精确重合。由图 2a 可见, 以最大位移作对比, 原型为 28.06 mm, VSG 预测值为 30.29 mm, 预测误差为 7.95%。使用 LVM, 预测值为 28.06 mm, 预测误差为 0。可见, LVM 方法比 VSG 方法有效降低了预测误差。

### 2.3 考虑弹塑性和应变率的验证

验证同时考虑弹性、应变硬化和应变率效应的影响, 此时 Johnson-Cook 模型中参数  $\bar{B}$  为材料的真实参数 275 MPa。使用 VSG 时, 原型的平均塑性应变率

取圆盘中心塑性应变率峰值的 1/2,  $\dot{\epsilon}_{ave}$  约为  $600 \text{ s}^{-1}$ 。按照传统模型相似律, 得到模型应变率  $\dot{\epsilon}_m^{nc} = \dot{\epsilon}_{ave} / \lambda_L = 6000 \text{ s}^{-1}$ , 由式(14)求得速度因子  $\lambda_v = 1.104$ 。其余部分采用的方法与 2.2 节相同。

类似地, 使用 VSG 方法和 LVM 方法模型预测原型的计算结果如图 3 所示。可以发现, 用 VSG 方法有明显的误差。从图 3a 可见, 以最大位移作对比, 原型为 23.96 mm, VSG 预测值为 26.29 mm, 预测误差为 9.72%, 比仅考虑应变率情况略有扩大。而使用 LVM, 预测没有误差。可见, 无论是否考虑弹塑性的影响, VSG 都有明显的误差, 而 LVM 始终是精确的。

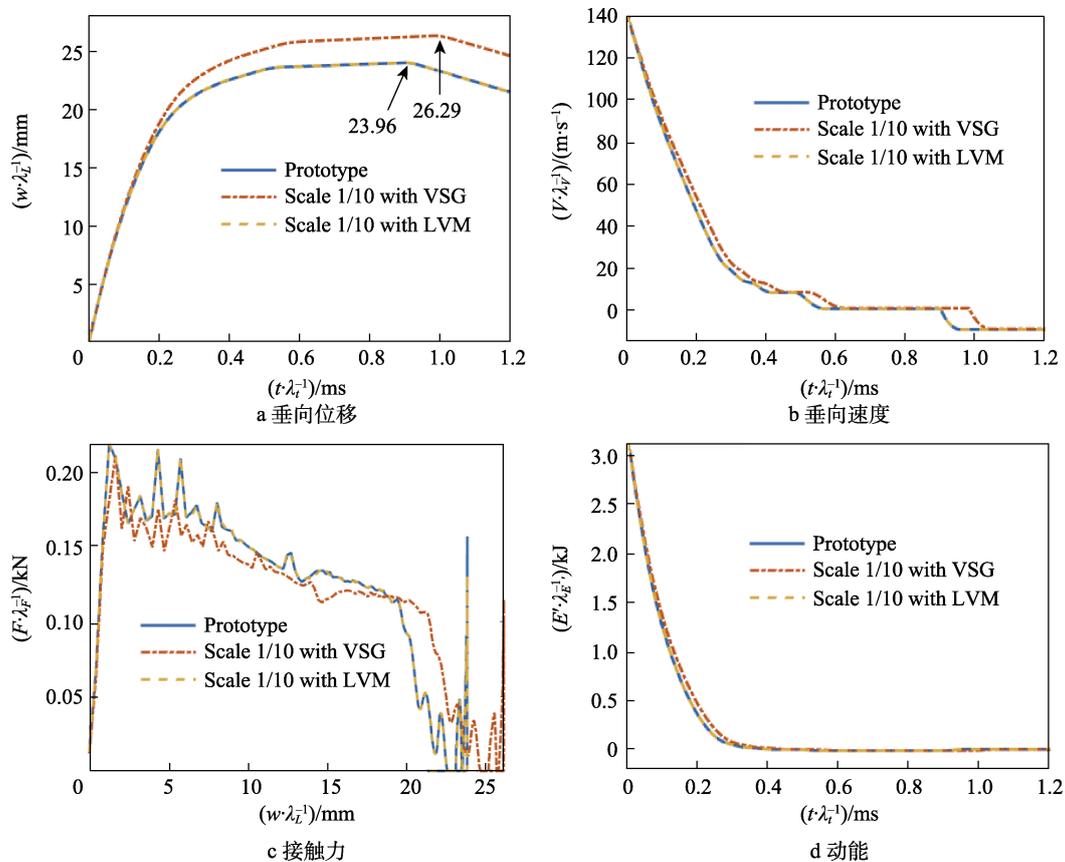


图 3 不同方法固支圆板撞击测试结果对比

Fig.3 Comparison of impact test results of fixed supported circular plates with different methods: a) vertical displacement; b) vertical velocity; c) contact force; d) kinetic energy

## 3 结语

综合考虑材料的弹性、应变硬化和应变率效应, 本文通过量纲分析推导了结构受冲击物撞击时的模化方程, 在此基础上得到了考虑应变率效应的模型相似律。与通常使用的 VSG 模型相似律进行了比较, 结果表明, 本文推导的模型相似律无需迭代求解, 无需任何关于结构的构型、物理过程及参数变化范围等信息, 亦无需预先估测或合理推测结构的平均应变

率, 是一个能够综合材料的弹塑性和应变率效应的直接精确的相似解, 方便指导缩比试验的直接开展。

使用质量块撞击固支圆板的数值模型进行了验证, 并对比了传统 VSG 方法的预测精度。分析表明, 无论是单纯考虑应变率效应, 还是同时考虑弹塑性和应变率效应, 使用 VSG 方法得到的预测结果, 都有较为明显的误差。而使用本文的方法, 预测误差为 0, 是一个精确的相似结果。因此, 本文提出的模型有助于工程应用领域的缩比试验设计, 能够消除可能的误差影响。

文中验证了所提方法的合理性和实用性,而算例结构仍相对简单,在更为复杂的结构和冲击载荷条件下,复杂的结构响应特征可能使得目前相关方法的预测精度有所降低,针对更复杂响应特征的模型修正和完善,将在后续工作中进一步深入研究。

#### 参考文献:

- [1] 谈庆明. 量纲分析[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2005.  
TAN Q M. Dimensional Analysis[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2005.
- [2] JONES N. Structural Impact[M]. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2012.
- [3] LU G, YU T X. Energy Absorption of Structures and Materials[M]. Cambridge: Woodhead, 2003.
- [4] JONES N, JOURI W, BIRCH R. On the Scaling of Ship Collision Damage[C]// Third International Congress on Marine Technology. Athens: International Maritime Association of the East Mediterranean, 1984.
- [5] ME-BAR Y. A Method for Scaling Ballistic Penetration Phenomena[J]. International Journal of Impact Engineering, 1997, 19(9/10): 821-829.
- [6] JIANG P, WANG W, ZHANG G J. Size Effects in the Axial Tearing of Circular Tubes during Quasi-Static and Impact Loadings[J]. International Journal of Impact Engineering, 2006, 32(12): 2048-2065.
- [7] LI Y L, ZHANG Y K, XUE P. Study of Similarity Law for Bird Impact on Structure[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008, 21(6): 512-517.
- [8] DRAZETIC P, RAVALARD Y, DACHEUX F, et al. Applying Non-Direct Similitude Technique to the Dynamic Bending Collapse of Rectangular Section Tubes[J]. International Journal of Impact Engineering, 1994, 15(6): 797-814.
- [9] OSHIRO R E, ALVES M. Scaling Impacted Structures[J]. Archive of Applied Mechanics, 2004, 74(1): 130-145.
- [10] ALVES M, OSHIRO R E. Scaling the Impact of a Mass on a Structure[J]. International Journal of Impact Engineering, 2006, 32(7): 1158-1173.
- [11] OSHIRO R E, ALVES M. Scaling of Cylindrical Shells under Axial Impact[J]. International Journal of Impact Engineering, 2007, 34(1): 89-103.
- [12] OSHIRO R E, ALVES M. Scaling of Structures Subject to Impact Loads when Using a Power Law Constitutive Equation[J]. International Journal of Solids and Structures, 2009, 46(18/19): 3412-3421.
- [13] OSHIRO R E, CALLE M A G, MAZZARIOL L M, et al. Experimental Study of Collision in Scaled Naval Structures[J]. International Journal of Impact Engineering, 2017, 110: 149-161.
- [14] 张振华, 秦健, 王乘, 等. 固支加筋方板在均布冲击载荷作用下动态响应的相似畸变研究[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2008, 29(3): 226-231.  
ZHANG Z H, QIN J, WANG C, et al. Method for Scaling Impact Load Data Obtained from a Small Scale Model to that of the Full Size Clamped and Stiffened Plate[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2008, 29(3): 226-231.
- [15] 张振华, 陈平毅, 漆万鹏, 等. 舰船局部板架结构在水下爆炸冲击波下动态响应的相似律研究[J]. 振动与冲击, 2008, 27(6): 81-86.  
ZHANG Z H, CHEN P Y, QI W P, et al. Scaling Law of Dynamic Response of Stiffened Plates for a Ship Subjected to under Water Shock[J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(6): 81-86.
- [16] 张振华, 肖昌润, 陈亮, 等. 加筋板结构在水下爆炸冲击波作用下动态响应的近似相似方法研究[J]. 船舶力学, 2010, 14(11): 1276-1283.  
ZHANG Z H, XIAO C R, CHEN L, et al. Approximate Scaling Method of Stiffened Plate Subjected to Underwater Explosion Blast[J]. Journal of Ship Mechanics, 2010, 14(11): 1276-1283.
- [17] 李海涛, 朱锡, 张振华. 船体梁在近距爆炸冲击波作用下动态响应的相似律研究[J]. 振动与冲击, 2010, 29(9): 28-32.  
LI H T, ZHU X, ZHANG Z H. Similarity Law for Dynamic Response of Hull Girder Subjected to Underwater Explosion in near Field[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(9): 28-32.
- [18] 姜正荣, 钟渝楷, 石开荣. 单层网壳冲击动态响应相似律与数值模拟验证[J]. 振动与冲击, 2016, 35(21): 143-149.  
JIANG Z R, ZHONG Y K, SHI K R. Comparability Rule and Numerical Simulation Verification for Impact Dynamic Responses of Single Layer Reticulated Shells[J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(21): 143-149.
- [19] 姜正荣, 钟渝楷, 石开荣, 等. 考虑重力影响的单层网壳冲击相似律及数值验证[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2016, 44(10): 43-48.  
JIANG Z R, ZHONG Y K, SHI K R, et al. Gravity-Based Impact Comparability Rule of Single-Layer Reticulated Shells and Its Numerical Verification[J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science Edition), 2016, 44(10): 43-48.
- [20] 徐坤, 刘源, 冯吉奎, 等. 应变率效应对结构响应相似律的影响研究[J]. 兵工学报, 2016, 37(S2): 101-106.  
XU K, LIU Y, FENG J K, et al. Study on the Influence of Strain Rate Effect on the Similarity Law of Structural

- Response[J]. *Acta Armamentarii*, 2016, 37(S2): 101-106.
- [21] WEI D M, HU C X. Scaling of an Impacted Reticulated Dome Using Partial Similitude Method[J]. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2019, 16(2): 1-12.
- [22] SADEGHI H, DAVEY K, DARVIZEH R, et al. A Scaled Framework for Strain Rate Sensitive Structures Subjected to High Rate Impact Loading[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2019, 125: 229-245.
- [23] SADEGHI H, DAVEY K, DARVIZEH R, et al. Scaled Models for Failure under Impact Loading[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2019, 129: 36-56.
- [24] DAVEY K, SADEGHI H, DARVIZEH R, et al. A Finite Similitude Approach to Scaled Impact Mechanics[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2021, 148: 103744.
- [25] JOHNSON G R, COOK W. A Constitutive Model and Data for Metals Subjected to Large Strains, High Strain Rates and High Temperatures [C]// *The 7th International Symposium on Ballistics*. [s. l.]: The Hague, 2018.